

**1. Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen  
Theorie der Beugungserscheinungen;  
von A. Rubinowicz.**

Inhaltsübersicht: Einleitung. — § 1. Umformung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals. — § 2. Struktur der elementaren Beugungswelle. — § 3. Analytische Fortsetzungen der Kirchhoffschen Lösung. — § 4. Verhalten der Kirchhoffschen Lösung am schwarzen Schirme. Beugung am vollkommen blanken Schirme. — § 5. Ausstrahlungsbedingung. Eindeutigkeit. — § 6. Die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblems für eine unendliche Halbebene. — § 7. Das Sommerfeldsche Beugungsproblem. — § 8. Vergleich der beiden Beugungstheorien. Die elementare Beugungswelle für die Sommerfeldsche Lösung.

Der erste Versuch, auf Grund der Wellentheorie des Lichtes eine Erklärung der Beugungsphänomene zu geben, rührt von Thomas Young (1802) her, der diese Erscheinung auf die Interferenz einer direkt einfallenden mit einer von der Schirmkante ausgehenden Lichtwelle zurückführte. Da aber die Lage der so berechneten Beugungstreifen mit der Erfahrung nicht völlig übereinstimmte, sah sich August Fresnel (1816) veranlaßt, durch eine Erweiterung des Huygensschen Prinzipes für die Theorie der Beugung ein neues Fundament zu schaffen, das später von Kirchhoff mit Hilfe der Theorie der Wellengleichung noch fester begründet wurde. Die schließlich von Sommerfeld<sup>1)</sup> (1894) gegebene, völlig strenge Lösung des Beugungsproblems für eine blanke Halbebene zeigte dann, daß in diesem Spezialfalle einerseits die nach dem Kirchhoffschen Verfahren gewonnenen Formeln für nicht zu große Beugungswinkel quantitativ hinreichend genau sind und andererseits sich in diesem Falle, in qualitativer Übereinstimmung mit der Youngschen Vorstellung, eine einfallende und eine von der beugenden Kante ausgehende zylindrische Beugungswelle unterscheiden

1) A. Sommerfeld, *Math. Ann.* 47. p. 317. 1896 und *Zeitschr. f. Math. u. Phys.* 46. p. 11. 1901. Diese Arbeiten werden im folgenden mit S. I und S. II bezeichnet.



läßt. Übrigens wird das Vorhandensein einer solchen Beugungswelle auch aus einzelnen nach dem Kirchhoffschen Verfahren gewonnenen Lösungen plausibel.<sup>1)</sup> Maey<sup>2)</sup> hat auch für den Fall der Halbebene direkt von der Kirchhoffschen Lösung die Beugungswelle abspalten können.

Gleichwohl ist es interessant, zu sehen, daß die Youngsche Theorie vom leuchtenden Schirmande sich in den nach Kirchhoff behandelten Spezialfällen nicht nur zufällig bestätigt. Wie wir nämlich zeigen wollen, läßt sich die Funktion, die durch das von Kirchhoff benutzte Flächenintegral dargestellt wird, durch eine einfache Umformung spalten in eine im Sinne der geometrischen Optik zu definierende *einfallende Lichtwelle* und in eine vom Schirmande ausgehende *Beugungswelle*. Dabei kann man sich die Beugungswelle nach einem Elementargesetze entstanden denken, welches jedem Punkte des Schirmandes eine, allein durch die geometrische Lage des betreffenden Randelementes und der Lichtquelle bestimmte, unsymmetrische Kugelwelle zuordnet. Man überzeugt sich sodann, daß sich die Kirchhoffsche Lösung durch eine reguläre, gemäß der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

erfolgende Fortsetzung überall im Raume, wo sich der physikalische Vorgang abspielt, definieren läßt, was die Feststellung der analytischen Eigenschaften des Kirchhoffschen schwarzen Schirmes ermöglicht. Schließlich wird noch mit Benutzung der gegebenen Umformung des Kirchhoffschen Integrals die Beugung an einer Halbebene behandelt, und es zeigt sich, daß die so erhaltene Lösung mit der strengen Sommerfeldschen sehr nahe verwandt ist, ja daß sie geradezu aus den Bausteinen der letzteren sich zusammensetzen läßt.

### § 1. Umformung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals.

Die wesentlichsten Tragsäulen der Kirchhoffschen Beugungstheorie sind die folgenden Tatsachen und Annahmen:

$u(x, y, z)$  sei eine in einem Bereiche  $G$  einmal stetig differenzierbare Lösung der Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

1) G. Kirchhoff, Vorlesungen über math. Optik. Leipzig 1891. p. 133.

2) E. Maey, Ann. d. Phys. 49. p. 69. 1893.

Mit  $\bar{u}$  und  $\overline{\partial u / \partial n}$  mögen an der Begrenzung ( $G$ ) des Gebietes  $G$  die Werte der Funktion  $u$  bzw. die ihrer Ableitung nach der inneren Normalen  $n$  bezeichnet werden. Es stellt dann das über ( $G$ ) erstreckte Flächenintegral

$$(1) \quad \frac{1}{4\pi} \iint_{(G)} \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \right\} df$$

eine in dem  $x, y, z$ -Raume diskontinuierliche Funktion dar, die innerhalb  $G$  gleich  $u$  und außerhalb dieses Gebietes gleich Null ist. Werden aber in dem Integral (1) für die Randwerte  $\bar{u}$  und  $\overline{\partial u / \partial n}$  Funktionen gewählt, die nicht einer in  $G$  regulären Lösung von  $\Delta u + k^2 u = 0$  entnommen wurden, so stellt zwar der Ausdruck (1) eine in  $G$  reguläre Lösung der Schwingungsgleichung dar, die ihr auf ( $G$ ) entsprechenden Grenzwerte von  $u$  und  $\partial u / \partial n$  sind aber im allgemeinen von den in (1) eingesetzten Werten  $\bar{u}$  und  $\overline{\partial u / \partial n}$  verschieden.

Kirchhoff macht nun die (qualitativ durch die Kleinheit der Wellenlänge nahegelegte, quantitativ aber doch nur allein durch den Enderfolg zu rechtfertigende) Annahme, daß an der beschatteten Seite des Schirmes  $S$  die Lichtausbreitung durch das Integral

$$(2) \quad u = \frac{1}{4\pi} \iint_F \left\{ \bar{u} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \overline{\frac{\partial u}{\partial n}} \right\} df$$

gegeben wird, wo  $F$  die Beugungsöffnung, d. h. irgendeinen beugenden Schirmrand  $B$  überspannende Fläche ist. Für  $\bar{u}$  und  $\overline{\partial u / \partial n}$  sind hier die Werte jener Funktion zu nehmen, die bei Abwesenheit des beugenden Schirmes die Ausbreitung des Lichtes darstellt. Ist also, wie wir dies im folgenden annehmen wollen, die Lichtquelle  $L$  punktförmig und im Endlichen gelegen, so werden  $\bar{u}$  und  $\overline{\partial u / \partial n}$  durch die Funktion  $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  bestimmt, wo  $\varrho$  die Entfernung von  $L$  bedeutet.

Das Integral (2) — wir wollen es in der Folge das Kirchhoffsche Beugungsintegral nennen — soll nun einer Umformung unterzogen werden.  $K$  sei die der geometrischen Schattengrenze entsprechende Fläche. Sie besteht aus allen an der Schattenseite des Schirmes gelegenen Punkten einer Kegelfläche, die eine durch den Lichtpunkt  $L$  hindurchgehende Gerade beim Umlaufen des beugenden Schirm-

randes  $B$  erzeugt. Nehmen wir nun in dem über  $F$  und  $K$  erstreckten Integral (1) die Randwerte  $u$  und  $\frac{\partial u}{\partial n}$  so an, wie dies der Funktion  $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  entspricht, so erhalten wir eine diskontinuierliche Funktion

$$(3) \quad u_E = \frac{1}{4\pi} \iint_{F+K} \left\{ \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \right\} df,$$

die nach (1) überall in dem „direkt beleuchteten“ von  $F$  und  $K$  begrenzten Raume  $R$  mit  $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  identisch ist, außerhalb  $R$  aber verschwindet.  $u_E$  („einfallendes  $u$ “) stellt somit an der von der Lichtquelle abgewandten Seite des Schirmes eine Lichtverteilung dar, wie man sie bei Außerachtlassung der Beugungserscheinungen nach der geometrischen Optik erwartet. Beachten wir, daß  $K$  von den Kugelflächen  $\varrho = \text{const}$  senkrecht geschnitten wird und demnach hier

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \right) = 0$$

und daß ferner

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) \cdot \cos(nr) = \left( \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{ikr} \cos(nr)$$

ist, so erhalten wir aus (3) für das Kirchhoffsche Beugungsintegral (2) den Ausdruck

$$(4) \quad u = u_E - \frac{1}{4\pi} \iint_K \frac{e^{ik(\varrho+r)}}{\varrho} \left( \frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2} \right) \cos(nr) df.$$

Es erübrigt jetzt noch, das hier auftretende Flächenintegral, das wir in der Folge mit  $u_B$  („gebogenes  $u$ “) bezeichnen wollen, durch eine Integration auf ein über den beugenden Rand  $B$  erstrecktes Linienintegral zurückzuführen. Als orthogonale Flächenkoordinaten wählen wir auf  $K$  die Entfernung von der Lichtquelle  $L$ , nämlich  $\varrho$ , und die Schnittlinien  $\sigma$  der Fläche  $K$  mit den Kugelflächen  $\varrho = \text{const}$ . Bezeichnen wir ein Linienelement von  $B$  mit  $ds$  und seine Entfernung von  $L$  mit  $\varrho_s$ , so ist (vgl. Fig. 1)

$$d\sigma = \frac{\varrho}{\varrho_s} \sin(\varrho_s, ds) ds$$

und daher

$$df = d\varrho d\sigma = \frac{\varrho}{\varrho_s} \sin(\varrho_s, ds) d\varrho ds.$$



Es wird daher schließlich

$$(5) \quad u = u_E + u_B = u_E + \frac{1}{4\pi} \int_B \frac{e^{ik\varrho_s}}{\varrho_s} \cdot \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cdot \frac{\cos(\eta, r_s)}{1 + \cos(r_s, \varrho_s)} \sin(\varrho_s, ds) ds.$$

Für den Fall, daß die Beugungserscheinungen durch eine ebene Welle  $e^{ikx}$  bedingt werden, führen die vorangehenden Betrachtungen zu dem Ausdruck

$$(5a) \quad u^* = u_E^* + u_B^* = u_E^* + \frac{1}{4\pi} \int_B e^{ikf_s} \cdot \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cdot \frac{\cos(\eta, r_s)}{1 + \cos(r_s, x)} \sin(x, ds) ds,$$

wo  $u_E^*$  jetzt mit Hilfe von  $e^{ikx}$  zu bilden ist und  $f_s$  den Abstand eines Randelementes  $ds$  von einer zur Fortschreitungsrichtung der einfallenden Welle senkrechten und im Raume festen Ebene, einer Phasenebene, bedeutet. Bei den folgenden Überlegungen werden wir uns aber ausschließlich auf die allgemeinere Formel (5) beziehen.

### § 2. Struktur der elementaren Beugungswelle.

Die Darstellung der Beugungserscheinungen durch das Kirchhoffsche Beugungsintegral (2) ging von der Erfahrung aus und wurde auch an ihr durch Versuche erprobt. In einer ebensolchen Beziehung zur Erfahrung steht selbstverständlich auch seine hier gegebene Umformung (5), die, wie leicht einzusehen ist, qualitativ der Youngschen Vorstellung von dem Entstehen der Beugungserscheinungen entspricht und die mithin als eine auf empirischer Basis ruhende quantitative Präzisierung dieser Anschauung gelten kann. Es entsprechen nämlich die beiden Bestandteile,  $u_E$  und  $u_B$ , in der Funktion (5), die zunächst ebenso wie das mit ihr identische Integral (2) nur an der Schattenseite des Schirmes den Beugungsvorgang darstellen will, unmittelbar der einfallenden und der gebeugten Welle. Bezüglich  $u_E$  ist dies in der Tat nach dessen Herstellungsart klar, und was  $u_B$  betrifft, so entsteht dieses durch Superposition der Kugelwellen

$$(6) \quad du_B = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\varrho_s}}{\varrho_s} \cdot \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \cdot \frac{\cos(\eta, r_s)}{1 + \cos(r_s, \varrho_s)} \sin(\varrho_s, ds) ds$$

die alle ihren Ursprung in den einzelnen Punkten des beugenden Randes  $B$  haben.<sup>1)</sup> Da ein jedes  $du_B$  durch die geometrische

1) Der experimentelle Nachweis für die Existenz der Beugungswellen ist von A. Kalaschnikoff (Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 44. phys. Teil, p. 133. 1912) durch eine sehr elegante objektive Versuchsanordnung erbracht worden.

Lage von  $ds$  zur Lichtquelle  $L$  allein bestimmt wird und nicht etwa auch von der Gestalt des beugenden Schirmes  $S$  oder von dem übrigen Verlaufe des beugenden Randes  $B$  abhängt, kann (6) als ein der Youngschen Vorstellungsweise entsprechendes Elementargesetz der Beugung angesprochen werden.

Der Bau der elementaren Beugungswelle  $du_B$  ist nun sehr einfach zu überblicken. Der Faktor

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{e^{ik\rho_s}}{\rho_s} \cdot \sin(\rho_s, ds) ds$$

bestimmt sozusagen den Anteil, den die Lichtquelle  $L$  dem Randelemente  $ds$  zur Zerstreuung überläßt;  $\frac{e^{ikr_s}}{r_s}$  bedingt, daß  $du_s$  eine Kugelwelle wird; und dem Richtungsfaktor

$$\frac{\cos(\alpha, r_s)}{1 + \cos(r_s, \rho_s)}$$

ist der unsymmetrische Bau dieser Kugelwelle zuzuschreiben.  $du_B$  ist ferner überall im Raume regulär, mit alleiniger Ausnahme von  $ds$  selbst und dessen Schattengrenze, wo

$$\cos(r_s, \rho_s) = -1$$

und daher der Richtungsfaktor im allgemeinen unendlich wird.

Nun ist die Frage von Interesse, wie sich diese Singularitäten von  $du_B$  im Verhalten der Funktion  $u_B$  an dem beugenden Schirmrande  $B$  und an der Schattengrenze  $K$  äußern. Um zunächst zu zeigen, daß  $u_B$  in allen Punkten der Kurve  $B$ , wo deren Krümmung nicht unendlich wird, auch selbst endlich bleibt, genügt es, das gleiche Verhalten für das über ein kleines geradliniges Stück von  $B$  erstreckte Integral  $J = \int du_B$  nachzuweisen. (Ein etwaiges Unendlichwerden von  $u_B$  in  $B$  könnte nämlich nur durch Integralelemente bewirkt werden, die auf  $B$  in unmittelbarster Nähe des gegen  $B$  hinstrebenden Aufpunktes gelegen sind.) Zu diesem Zwecke formt man am bequemsten dieses Integral so um, wie dies bei der Betrachtung der Beugung an einer Halbebene in § 6 geschieht. Schließlich erkennt man leicht, daß  $u_B$  in  $K$  einen Sprung erleidet, der die hier vorhandene Unstetigkeit von  $u_E$  gerade kompensiert.  $u_E + u_B$  wird ja an der Schattenseite des Schirmes durch das Kirchhoffsche Integral gegeben, das stets eine im ganzen Raume mit alleiniger Ausnahme der Fläche  $F$  reguläre Lösung der Schwingungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  darstellt. Übrigens kann man

dieses unstetige Verhalten von  $u_B$  auch aus der in (4) enthaltenen Integraldarstellung dieser Funktion nach einem bekannten Satze aus der Theorie der Schwingungsgleichung erschließen.<sup>1)</sup>

### § 3. Analytische Fortsetzungen der Kirchhoffschen Lösung.

Bisher haben wir die Lösung des Kirchhoffschen Beugungsproblems nur an der Schattenseite des Schirmes betrachtet, wo sie mit der durch das Kirchhoffsche Integral definierten Funktion — die von nun an  $u_{\text{Kirch.}}$  heißen möge — identisch war. An der beleuchteten Seite von  $S$  stellt nun aber  $u_{\text{Kirch.}}$  den Beugungsvorgang sicherlich nicht dar.  $u_{\text{Kirch.}}$  ist ja <sup>2)</sup> im ganzen Raume mit alleiniger Ausnahme von  $F$  regulär, besitzt also keine der Lichtquelle  $L$  entsprechende Singularität. Es läßt sich auch das nicht reguläre Verhalten von  $u_{\text{Kirch.}}$  in  $F$  physikalisch in keiner Weise rechtfertigen. Den „physikalischen Zweig“ der Funktion  $u$ ,  $u_{\text{phys.}}$ , der den gesamten physikalischen Vorgang beschreiben soll, erhalten wir aber, wenn wir das an der Schattengrenze des Schirmes  $S$  gegebene

$$u_{\text{phys.}} = u_{\text{Kirch.}} = u_E + u_B$$

auf die Lichtseite von  $S$  durch die Fläche  $F$  hindurch gemäß der Schwingungsgleichung regulär fortsetzen. Das Resultat

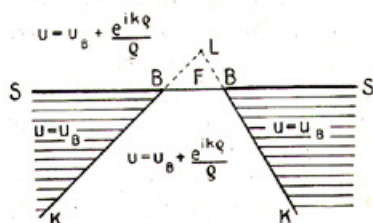


Fig. 2.

dieses Vorgehens ist an der Hand der Formel (5) sofort zu übersehen:  $u_B$  wird im ganzen Raume durch das Integral in (5) bestimmt, und  $u_E$  ist überall im schraffierten Gebiete der zweidimensional schematisierten Fig. 2 gleich Null, im nichtschraffierten gleich  $\frac{e^{ikr}}{r}$ .

Wir sind jetzt aber auch in der Lage, die Gesamtheit aller Zweige der Funktion  $u$  anzugeben. Setzen wir nämlich  $u_{\text{phys.}} = u_E + u_B$  etwa von der beleuchteten Seite von  $S$  her

1) Vgl. etwa F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  usw. Leipzig 1891. p. 235.

2) F. Pockels, l. c. p. 229 u. f.



durch  $S$  hindurch weiter fort, so erhalten wir einen neuen Zweig von  $u$ , der, wie dies wieder die Darstellung (5) ergibt, durch

$$u_{\text{phys.}} + \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$$

gegeben ist. Das heißt, wird der beugende Rand  $B$  einmal in einem solchen Sinne umkreist, daß zuerst die beleuchtete und dann die beschattete Seite von  $S$  passiert wird, so wächst dabei  $u_{\text{phys.}}$  um  $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$ . Wenn wir also  $B$  fortgesetzt umkreisen, bekommen wir für die gesamte Funktion  $u$  offenbar die Darstellung :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = u_{\text{phys.}} + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} = u_B + u_E + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}, \\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{array} \right.$$

Jetzt erkennt man auch, daß der Bereich, in dem  $u$  eindeutig ist, aus einem aus lauter gleichen Blättern sich zusammensetzenden Riemannschen Raume  $R_\infty$  besteht, der den beugenden Rand  $B$  zur einzigen Verzweigungslinie<sup>1)</sup> (das Analogon zum Verzweigungspunkte in der Funktionentheorie) besitzt. Wird der Zweig  $u_{\text{phys.}}$  für sich allein betrachtet, so entspricht dem Schirme  $S$  eine Verzweigungsfläche<sup>1)</sup> (in Analogie zum Verzweigungsschnitte in der Funktionentheorie), in der  $u_{\text{phys.}}$  nach (7) einen Sprung um  $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  erleidet.

Wir wollen jetzt darauf hinweisen, daß die Funktion  $u$  auch noch einen anderen Zweig  $u_{\text{phys.}}^*$  enthält, der ebenfalls als Lösung eines Kirchhoffschen Beugungsproblem es angesehen werden kann. Zunächst bemerken wir, daß  $u_{\text{Kirch.}}$  erhalten wird, wenn wir (5) von der beschatteten Seite von  $S$  her über  $S$  hinaus fortsetzen.  $u_{\text{Kirch.}}$  und (5) stimmen ja an der Schattenseite von  $S$  miteinander überein und es müssen deshalb die aus ihnen bei der gleichen regulären Fortsetzung entstehenden Zweige miteinander identisch sein.  $u_{\text{Kirch.}}$  ist mithin in dem von  $F$  und  $K$  eingeschlossenen Raume durch

$$u_B + \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$$

1) Über die analysis situs dreidimensionaler Riemannscher Räume vgl. etwa A. Sommerfeld, Proc. of the London Math. Soc. Vol. XXVIII. p. 395. 1897.

und außerhalb davon durch  $u_B$  allein gegeben. (vgl. Fig. 3b).  $F$  spielt hier die Rolle einer Verzweigungsfläche. Wird nun aus  $u_{\text{Kirch.}}$  durch unbeschränktes Umkreisen des Randes  $B$  die gesamte Funktion  $u$  hergestellt, so erhalten wir sie jetzt offenbar in der Form:

$$(8) \quad u = u_{\text{Kirch.}} + n \cdot \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Der hier durch  $n = -1$  festgelegte Zweig  $u_{\text{Kirch.}} - \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  ist nun mit der oben angekündigten Funktion  $u^*_{\text{phys.}}$  identisch und beschreibt ersichtlich die Beugung der von  $L$  ausgehenden

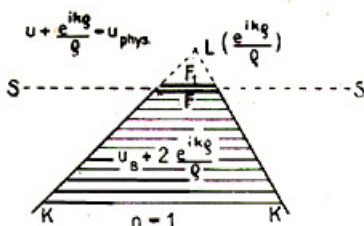


Fig. 3a.

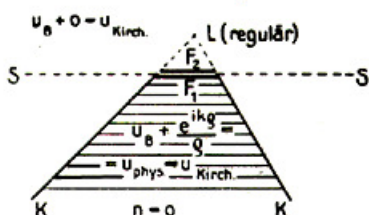


Fig. 3b.

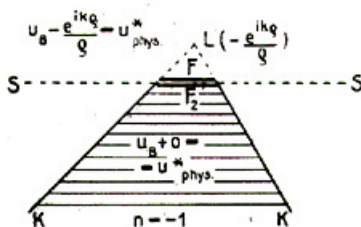


Fig. 3c.

Lichtwelle  $-\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  an einem schwarzen, mit der Fläche  $F$  zusammenfallenden Schirme. Innerhalb des von  $F$  und  $K$  eingeschlossenen Raumes (vgl. Fig. 3c) wird ja  $u^*_{\text{phys.}}$  durch  $u_B$  (Beugungswelle) gegeben und außerhalb dieses Raumes durch  $u_B - \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  (Beugungswelle + einfallendes Licht).

Wie die drei Zweige  $u_{\text{phys.}}$ ,  $u_{\text{Kirch.}}$  und  $u^*_{\text{phys.}}$  in dem Riemannschen Raume  $R_\infty$  gegeneinander gelagert sind, übersieht man am einfachsten an der Hand der obenstehenden Figuren. Die Figg. 3 a, b, c versinnlichen zweidimensional schematisiert die drei den Werten  $n = 1, 0, -1$  entsprechenden Zweige

der Funktion (8). Man muß sich die drei Blätter übereinandergelegt und dann die beiden „Ufer“  $F_1$  und ebenso  $F_2$  miteinander verschmolzen denken. In jedem Blatte ist in dem „schraffierten“ und „unschraffierten“ Bereiche die hier gemäß (7) geltende Darstellung für  $u$  angegeben und bei der Lichtquelle  $L$  die in diesem Punkte auftretende Singularität in Klammern vermerkt. Es ist sofort klar, daß  $u_{\text{phys.}}$  in der oberen Halbebene des Blattes  $n = 1$  und der unteren des Blattes  $n = 0$  enthalten ist und daß die Blätter  $n = 0$  bzw.  $n = -1$  den Funktionen  $u_{\text{Kirch.}}$  bzw.  $u^*_{\text{phys.}}$  entsprechen.

Wir bemerken noch anhangsweise, daß die durch (7) und (8) gegebene doppelte Darstellbarkeit der Funktion  $u$  der zweifachen Möglichkeit entspricht, durch eine durch  $B$  hindurchgelegte (entweder wie  $F$  ganz im Endlichen gelegene oder, wie  $S$ , auch ins Unendliche verlaufende) Verzweigungsfläche aus dem Riemannschen Raume  $R_{\infty}$  ein schlichtes Blatt abzusondern.

#### § 4. Verhalten der Kirchhoffschen Lösung am schwarzen Schirme. Beugung am vollkommen blanken Schirme.

Physikalisch bemerkenswert ist die Tatsache, daß in  $u_{\text{phys.}}$  an der beleuchteten Seite des Schirmes  $S$  kein Term auftritt, der als reflektiertes Licht zu deuten wäre. Der Kirchhoffsche Schirm ist also tatsächlich schwarz.

Die Überlegungen des vorigen Paragraphen haben aber auch die analytischen Eigenschaften festgestellt, die einem schwarzen Schirme bei der Kirchhoffschen Behandlungsweise der Beugungserscheinungen zuerteilt werden:  $u_{\text{phys.}}$  erleidet in dem Schirme  $S$  einen Sprung um  $\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}$  oder, allgemein gesprochen, um die Lichterregung, die auch bei Abwesenheit des Schirmes vorhanden wäre.

Es bedarf aber wohl kaum eines besonderen Hinweises, daß diesem analytischen Verhalten, das hier den Kirchhoffschen schwarzen Schirm charakterisiert, physikalisch keine irgendwie ausgezeichnete Bedeutung zukommt. Wie dies besonders Voigt<sup>1)</sup> und Sommerfeld<sup>2)</sup> hervorgehoben haben, ist allen schwarzen Schirmen nur das eine Merkmal gemeinsam, daß

1) W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik. Bd. II. Leipzig 1895. p. 768.

2) S. II. p. 13.

der Energiestrom an der Oberfläche des schwarzen Schirmes stets nach innen gerichtet ist. In der Mannigfaltigkeit der durch diese Forderung festgelegten schwarzen Schirme ist der Kirchhoffsche nur dadurch ausgezeichnet, daß die Lösung des ihm entsprechenden Beugungsproblem es unmittelbar durch das Kirchhoffsche Integral (2) anzugeben ist.

In Kürze wollen wir noch auf die Frage eingehen, inwieweit das Kirchhoffsche Verfahren die Beugung an einem vollkommen blanken Schirme approximieren kann. Wir setzen im folgenden  $S$  und  $F$  als eben voraus und benutzen, wie dies Sommerfeld in seiner Vorlesung tut, in dem Kirchhoffschen Integral (2) statt  $\frac{e^{ikr}}{r}$  die Greensche Funktion für den Halbraum, nämlich

$$(9) \quad \frac{e^{ikr}}{r} \pm \frac{e^{ikr'}}{r'}$$

$r'$  bedeutet dabei den dem  $r$ , d. h.  $\overrightarrow{Pdj}$  analogen Abstand des an  $S$  gespiegelten Aufpunktes  $P'$  (er heiße  $P'$ ), d. h.  $\overrightarrow{P'dj}$ . Die Verwendung der Greenschen Funktion sichert uns dabei schon von vornherein den Vorteil, daß wir das Verhalten von  $u$  bei einer von der Schattenseite her an  $F$  und  $S$  erfolgenden Annäherung vollständig überblicken können. Es wird für den Fall, daß wir in (9) das obere (untere) Zeichen nehmen  $\frac{\partial u}{\partial n}$  bzw. ( $u$ ) in  $F$  gleich  $\frac{e^{ikr}}{r}$ , während es, was besonders wichtig ist, in  $S$  verschwindet.

Auf demselben Wege, der zur Herleitung von (5) diente, erhält man jetzt, und zwar wieder zunächst nur an der beschatteten Seite von  $S$ , zur Beschreibung des Beugungsvorganges die Funktion

$$(10) \quad u_E + u_B \pm u_{B'}$$

wobei  $u_E$  und  $u_B$  hier ihre frühere Bedeutung haben und  $u_{B'}$  dem Werte der Funktion  $u_B$  in dem Punkte  $P'$  entspricht. Wird also (10) auf die beleuchtete Seite von  $S$  über  $F$  hinaus regulär fortgesetzt (vgl. die zweidimensional schematisierte Fig. 4), so erleidet  $u_{B'}$  in der durch Spiegelung an  $S$  aus der Schattengrenze  $K$  hervorgehenden Fläche  $K'$  einen Sprung, der offenbar behoben werden kann, falls man zu (10) eine

Funktion  $\mp u_R$  („reflektiertes  $u$ “) hinzufügt, die in dem von  $K'$  und  $S$  eingeschlossenen (in der Fig. schraffierten) Raume gleich  $\mp \frac{e^{ik\rho'}}$ , sonst aber überall gleich Null ist.  $\rho'$  ist dabei die Entfernung des Aufpunktes  $P$  von der an  $S$  gespiegelten Lichtquelle  $L$  etwa  $L'$ . Auf diese Weise erhält man die bis auf  $L$  und  $S$  nunmehr in dem ganzen physikalischen Raume reguläre Lösung der Schwingungsgleichung

$$(11) \quad u = u_E + u_B \pm (-u_R + u_{R'})$$

die an der beleuchteten Seite von  $S$  eine reflektierte Welle  $u_R$  enthält.

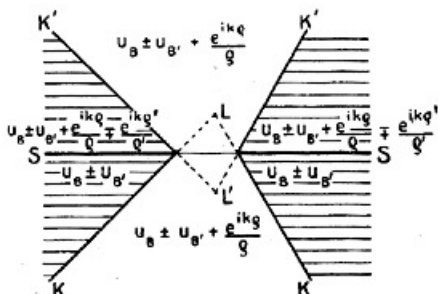


Fig. 4.

Wie bereits früher hervorgehoben wurde und wie man jetzt aus (11) auch direkt ersieht (vgl. Fig. 4), erfüllt  $u$  an der Schattenseite von  $S$ , je nach dem Vorzeichen in (9), die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{oder} \quad u = 0.$$

Gleichzeitig erkennt man aber, daß an der beleuchteten Seite von  $S$  keine dieser beiden Randbedingungen befriedigt wird. Denn wird z. B. in (9) das obere Vorzeichen vorausgesetzt, so erfüllen zwar hier die beiden Beugungswellen  $u_B + u_{B'}$  die Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

die einfallende und die reflektierte Welle  $u_B - u_R$  genügen aber zusammengenommen jetzt der Randbedingung  $u = 0$ . Wir können somit sagen: In dem jetzt betrachteten Falle ist

der Schirm  $S$  zwar an beiden Seiten reflektierend, aber doch nur an der beschatteten Seite im Sinne der Randbedingungen

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

vollkommen blank.

### § 5. Ausstrahlungsbedingung. Eindeutigkeit.

Man kann sich auch noch leicht überzeugen, daß die Funktion  $u$  in ihren durch ein endliches  $n$  bestimmten Zweigen und daher auch speziell der uns interessierende Zweig  $u_{\text{phys}}$  im Unendlichen verschwinden und der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung<sup>1)</sup>

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right) = 0$$

genügen. Physikalisch bedeutet dies nichts anderes, als daß  $u$  und  $u_{\text{phys}}$  aus lauter ins Unendliche divergierenden Wellen bestehen. Das Erfülltsein von (12) ergibt sich einfach aus der Darstellung (8) für die Funktion  $u$ ; denn das Bestehen dieser Relation für  $u_{\text{Kirch}}$  [in der Darstellung (2)] und  $\frac{e^{i k \varrho}}{\varrho}$  ist ja unmittelbar klar.

Die oben angegebenen Eigenschaften der Lösung  $u_{\text{phys}}$  des Kirchhoffschen Beugungsproblem es hier nochmals zusammenfassend, können wir also behaupten:

Die Funktion  $u_{\text{phys}}$  wird durch eine, mit Ausnahme der Lichtquelle  $L$  und des Schirmes  $S$  im Endlichen überall stetige und einmal stetig differentierbare Lösung der Schwingungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  gegeben, die sich in  $L$  wie  $\frac{e^{i k \varrho}}{\varrho}$  verhält, in  $S$  endlich bleibt, aber den Sprung  $\frac{e^{i k \varrho}}{\varrho}$  erleidet und im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung genügt.

Durch diese Eigenschaften ist die Funktion  $u_{\text{phys}}$  eindeutig bestimmt. Die Differenz  $U$  zweier den obigen Bedingungen entsprechenden Funktionen  $u_{\text{phys}}$  ist ja im schlichten Raume überall eindeutig und stetig und genügt im Unendlichen der Ausstrahlungsbedingung.  $U$  ist ferner, mit eventueller Ausnahme der beugenden Kanten  $B$ , überall einmal

1) A. Sommerfeld, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 21. p. 309. 1912. Vgl. insbesondere p. 331.

stetig differentierbar. Es läßt sich mithin  $U$  nach (1) durch das Integral

$$U = \frac{1}{4\pi} \iint \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} df$$

darstellen, wobei die Integration über eine den beugenden Rand  $B$  umschließende Röhre zu erstrecken ist. Nach (1) müßte eigentlich hier noch ein über eine unendlich ferne Fläche erstrecktes Flächenintegral dazu kommen, das aber wegen der Ausstrahlungsbedingung verschwindet. Lassen wir nun den Radius der den beugenden Rand  $B$  umschließenden Röhre abnehmen, so verschwindet  $U$ , wie man dies etwa nach einem von Sommerfeld<sup>1)</sup> bei räumlichen Potentialen angewandten Verfahren zeigen kann. Damit ist aber die Eindeutigkeit der Lösung  $u_{\text{phys}}$  schon erwiesen,

#### § 6. Die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblems für eine unendliche Halbebene.

Es soll nun die Kirchhoffsche Lösung des Beugungsproblems für eine unendliche Halbebene mit Hilfe des in § 2 angegebenen Elementargesetzes in eine Form gebracht werden, die in ihrem Aufbau mit den Sommerfeldschen Lösungen für den schwarzen Schirm sehr nahe verwandt ist und sich daher für den Vergleich der beiden Theorien besonders gut eignet.

Das Ziel der folgenden Überlegungen sind dann vor allem zwei Resultate: Das erste ist die Erkenntnis, daß die „Familienähnlichkeit“ der Kirchhoffschen und Sommerfeldschen Funktionen in einfachster Weise die Tatsache erklärt, daß die beiden Beugungstheorien für nicht zu große Beugungswinkel (wo allein eine exakte Beobachtung möglich ist) praktisch die gleiche Intensitätsverteilung liefern. Als zweites Ergebnis wird uns die Annahme plausibel werden, daß die Sommerfeldsche Beugungswelle durch Interferenz von, den Kugelwellen (6) ganz ähnlich gebauten, elementaren Beugungswellen entsteht.

In diesem Abschnitt soll nun eine neue Form der Kirchhoffschen Lösung für eine Halbebene hergeleitet werden.  $r, \varphi, z$  sei

1) A. Sommerfeld, Proc. of the London Math. Soc. Vol. XXVIII. p. 395. 1897.

ein System von Zylinderkoordinaten. Die beugende Halbebene  $S$  möge durch die Gleichung  $\varphi = 0$  gegeben sein, so daß die beugende Kante mit der  $z$ -Achse des Koordinatensystems zusammenfällt. Die Lichtquelle  $L$  und der Aufpunkt  $P$  sollen durch die Koordinaten  $r_0, \varphi_0, z_0$  bzw.  $r, \varphi, z$  festgelegt sein und die  $z$ -Koordinate für die Punkte der beugenden Kante mit  $s$  bezeichnet werden (vgl. Fig. 5).

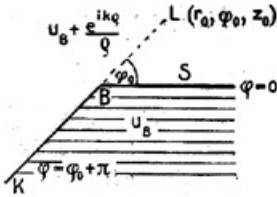


Fig. 5.

Es ist dann:

$$\varrho_s^2 = (s - z_0)^2 + r_0^2,$$

$$r_s^2 = (s - z)^2 + r^2,$$

$$\sin(\varrho_s, ds) = \frac{r_0}{\varrho_s}.$$

Da ferner die Projektionen von  $r_s$  und  $r$  auf die Normale der durch die beugende Kante und  $L$  hindurchgehenden Ebene  $\varphi = \varphi_0 + \pi$  (Schattengrenze  $K$ ) einander gleich sind, nämlich gleich dem Abstände des Punktes  $P$  von dieser Ebene, so ist:

$$\cos(r_s, n) = \frac{r \sin(\varphi - \varphi_0 - \pi)}{r_s}.$$

Schließlich erhält man (mit Benutzung des cos-Satzes):

$$\begin{aligned} \overline{LP}^2 &= r_0^2 + r^2 + (z - z_0)^2 - 2 r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \\ &= r_s^2 + \varrho_s^2 - 2 r_s \varrho_s \cos(r_s, \varrho_s), \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \cos(r_s, \varrho_s) &= \frac{s^2 - s(x_0 + x) + z x_0 + r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_s \varrho_s} \\ &= \frac{(s - x)(s - x_0) + r r_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}{r_s \varrho_s}. \end{aligned}$$

Führen wir nun durch die Gleichung

$$(r_s + \varrho_s)^2 = r^2 + r_0^2 + (z - z_0)^2 + 2 r r_0 \cos i \alpha$$

an Stelle von  $s$  eine neue Integrationsvariable  $\alpha$  ein und beachten dabei, daß dann

$$\sin i \alpha = i \frac{(s - x) \varrho_s + (s - x_0) r_s}{r r_0}$$

wird, so läßt sich (5) für den Fall der Beugung an einer Halbebene umformen in



$$(13) \quad u = u_E - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin(\varphi - \varphi_0 - \pi)}{\cos(\varphi - \varphi_0 - \pi) - \cos ia} da,$$

worin  $R = r_s + \varrho_s = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos ia}$ .

### § 7. Das Sommerfeldsche Beugungsproblem.

Wir wollen nun an die für unsere Schlüsse wichtigen Resultate der Sommerfeldschen Beugungstheorie<sup>1)</sup> erinnern. Das allgemeinste, der Behandlung durch die Sommerfeldschen Methoden zugängliche Beugungsproblem ist die Beugung des von einer punktförmigen Lichtquelle  $L$  (mit den Koordinaten  $r_0, \varphi_0, z_0$ ) ausgestrahlten Lichtes an einem vollkommen blanken (von den beiden Halbebenen  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \chi$  begrenzten) Keile. Die Sommerfeldsche Lösung wird nach einem Spiegelungsverfahren hergestellt und ist je nach dem Polarisationszustande des ausgestrahlten Lichtes durch

$$W = w(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0, z_0; \chi) \pm w(r, \varphi, z; r_0, -\varphi_0, z_0; \chi)$$

bestimmt. Im folgenden wird uns aber nur die Funktion  $w = w(r, \varphi, z; r_0, \varphi_0, z_0; \chi)$  interessieren, die nach Voigt und Sommerfeld bei beliebigem, nur der Einschränkung  $\chi > \pi$  unterworfenen Winkel  $\chi$  die Beugung an einem durch einen geradlinigen Rand begrenzten schwarzen Schirme beschreibt. Im nächsten Paragraphen soll dann  $w$  zum Vergleiche mit der Funktion  $u_{\text{phys}}$  herangezogen werden.

Die Funktion  $w$  wird nun durch die folgenden Eigenschaften festgelegt:

$R_\infty$  sei ein unendlichvielblättriger Riemannscher Raum, dessen einzige Verzweigungslinie mit der  $z$ -Achse unseres Zylinderkoordinatensystems zusammenfällt, in dem also zwei Punkte, deren Koordinaten sich nur in den  $\varphi$ -Werten um  $2\pi\nu$  ( $\nu = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ ) unterscheiden, als voneinander verschieden anzusehen sind.

Die Funktion  $w$  ist dann in  $R_\infty$  eindeutig und in ihrer Abhängigkeit von  $\varphi$  periodisch mit der Periode  $2\chi$ . Sie ist in  $R_\infty$  überall endlich, bis auf die symmetrisch um die Win-

1) Vgl. S. I und S. II. Eine kurze allgemeine Übersicht über die Sommerfeldsche Theorie der Beugung ist auch in dem Artikel von P. S. Epstein in der Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V<sub>2</sub>. p. 488 enthalten.

ungsgerade angeordneten Punkte  $(r_0, \varphi_0 + 2\nu\chi, z_0)$  ( $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), wo die synchron schwingenden Lichtquellen  $L_\nu$ :

$$\frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} \quad (R_\nu = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0 - 2\nu\chi)})$$

gelegen sind. In der Windungsgeraden ist zwar die Funktion  $w$  selbst und ihre Ableitungen nach  $\varphi$  und  $z$ , nicht aber ihre Ableitung nach  $r$  endlich. Im Unendlichen genügt  $w$  der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung.

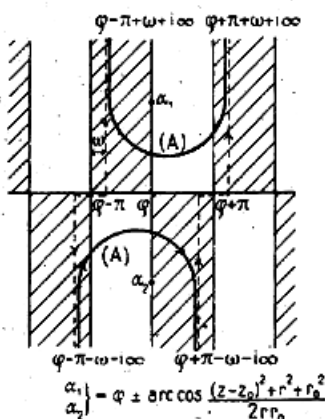


Fig. 6.

Nach dem Sommerfeldschen heuristischen Verfahren<sup>1)</sup> kann nun  $w$  unmittelbar in der Form

$$w = \frac{1}{2\chi} \int_{(A)} \frac{e^{ikR^*}}{R^*} \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\varphi_0 - \alpha)}} d\alpha,$$

$$R^* = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \varphi)}$$

angesetzt werden. Die Integration ist in der komplexen  $\alpha$ -Ebene auf dem in der Fig. 6 ersichtlichen Wege (A) zu führen. Wird nun (A) in die beiden Geraden

$$\Re(\alpha) = \varphi \pm \pi$$

deformiert<sup>2)</sup>, so wird mit Rücksicht darauf, daß in der reellen Achse der  $\alpha$ -Ebene in den Punkten  $\varphi_0 + 2\nu\chi$  einfache Pole gelegen sind,  $w$  in die Gestalt

$$w = \sum_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_\nu(\varphi) \frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} + \frac{1}{2i\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikR}}{R} \left[ \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 - \pi + i\epsilon)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 + \pi + i\epsilon)}} \right] d\alpha,$$

$$R_\nu = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0 - 2\nu\chi)},$$

$$R = \sqrt{(z - z_0)^2 + r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos i\alpha}$$

1) S. II, p. 22.

2) S. II, p. 27.

übergeführt.  $\vartheta_\nu(\varphi)$  ist ein Diskontinuitätsfaktor, der nur für  $\varphi$ -Werte, die der Ungleichung

$$\varphi_0 - \pi + 2\nu\chi \leq \varphi \leq \varphi_0 + \pi + 2\nu\chi$$

entsprechen, gleich Eins, sonst aber überall gleich Null ist.

Wenn wir noch beachten, daß

$$\frac{1}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}} + \frac{1}{1 - e^{i(\alpha-\beta)}} = \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} - e^{-i\beta} - e^{i\beta}} + 1 = -i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \cos \beta} + 1$$

ist, so wird schließlich

$$w = w_E + w_{B_1} + w_{B_2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \nu \vartheta_\nu(\varphi) \frac{e^{ikR_\nu}}{R_\nu} - \frac{1}{2\chi} \int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 - \pi)}{\cos \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 - \pi) - \cos \frac{\pi}{\chi}ia} da + \frac{1}{2\chi} \int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 + \pi)}{\cos \frac{\pi}{\chi}(\varphi - \varphi_0 + \pi) - \cos \frac{\pi}{\chi}ia} da.$$

Wir wollen noch kurz die Deutung der Bestandteile  $w_E$ ,  $w_{B_1}$  und  $w_{B_2}$  angeben, in die die Funktion  $w$  nach ihrer letzten Darstellung zerfällt.  $w_E$  („einfallende Welle“) stellt die von den Lichtquellen  $L_\nu$  ausgehenden Lichtwellen im Riemannschen Raume  $R_\infty$  so dar, wie man dies nach der geometrischen Optik erwartet, falls man der Verzweigungsgeraden eine schattengebende Wirkung zuschreibt. Die von einem ins Auge gefaßten Lichtpunkt  $L_{\nu^*}(\tau_0, \varphi_0 + 2\nu^*\chi, z_0)$  ausgestrahlte Welle

$$\frac{e^{ikR_{\nu^*}}}{R_{\nu^*}}$$

wird nämlich an der Windungsgeraden sozusagen aufgeschlitzt und erleidet (wegen des Diskontinuitätsfaktors  $\vartheta_{\nu^*}(\varphi)$ ) an den „Schattengrenzen“

$$\varphi = \varphi_0 - \pi + 2\nu^*\chi \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_0 + \pi + 2\nu^*\chi$$

einen Sprung von

$$\frac{e^{ikR_{\nu^*}}}{R_{\nu^*}}$$

auf Null. Die Unstetigkeiten der ganzen Funktion  $w_E$  liegen demnach in den beiden Ebenenfächern („Schattengrenzen“)

$$(14) \quad \begin{cases} \text{a) } \varphi = \varphi_0 - \pi + 2\nu\chi \\ \text{b) } \varphi = \varphi_0 + \pi + 2\nu\chi \end{cases} \quad (\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Von den beiden Integralen („Beugungswellen“)  $w_{B_1}$  und  $w_{B_2}$  ist  $w_{B_1}$  im ganzen Raume  $R_\infty$  bis auf die Schattengrenzen (14b) stetig und erleidet hier einen Sprung, der die an diesen Stellen liegenden Unstetigkeiten von  $w_E$  gerade kompensiert. Analog ist  $w_{B_2}$  den Schattengrenzen (14a) zugeordnet.

§ 8. Vergleich der beiden Beugungstheorien. Die elementare Beugungswelle für die Sommerfeldsche Lösung.

Die Analogie zwischen  $u$  (13) und der Funktion  $w$  für den Fall der Beugung an einer schwarzen Halbebene ist nun sofort einzusehen. Der erste in (13) auftretende Term  $u_E$  entspricht der unendlichen Summe  $w_E$ , und der zweite Term  $u_B$  wird mit  $w_{B_1}$  identisch, falls wir hier  $\chi = \pi$  setzen. Es fehlt dagegen in  $u$  ein zu  $w_{B_2}$  analoges Integral.

Wir wollen nun zusehen, wie sich schon auf Grund der jetzt auseinandergesetzten Verwandtschaft von  $u$  und  $w$  die Tatsache ergibt, daß die beiden Funktionen für nicht zu große Abstände von der Schattengrenze die gleichen Beugungserscheinungen darstellen. Die Theorie der Funktion  $w$  zeigt zunächst:

I. daß die Wellen  $w_{B_1}$  bzw.  $w_{B_2}$  nur in kleinen Winkelabständen von den ihnen zugehörigen Schattengrenzen (14b) bzw. (14a) eine mit der einfallenden Welle vergleichbare Amplitude haben und daß jede dieser beiden Funktionen in einem größeren Winkelabstände von der ihr entsprechenden Schattengrenze bei einer Auswertung von  $w$  vollständig zu vernachlässigen ist;

II. daß  $w_{B_1}$  und  $w_{B_2}$  in der Nähe ihrer Schattengrenzen von dem Werte des Winkels  $\chi$  praktisch nicht abhängen.

Aus I. und II. folgt nun sofort, daß die Funktionen  $w$  stets die gleichen Beugungserscheinungen beschreiben, wenn nur die beiden Schattengrenzen (14a) und (14b) nicht allzunahe aneinander liegen und daß dies auch noch in einem solchen singulären Falle gilt, falls wir nur das der einen dieser beiden Schattengrenzen zugeordnete  $w_{B_\nu}$  ( $\nu = 1, 2$ ) und den entsprechenden Term in  $w_E$  streichen. Nun ist es aber klar, daß  $u$  nichts anderes ist als eine auf die oben angedeutete Weise für

den singulären Fall  $\chi = \pi$  konstruierte Funktion  $w$  und mithin dieselben Beugungserscheinungen darstellen muß wie  $w$  in einem nichtsingulären Falle. Es mag noch daran erinnert werden, wie sich  $w$  beim Zusammenfallen der beiden Schattengrenzen verhält. In einem jeden solchen singulären Falle gibt es offenbar ein ganzzahliges  $\mu$ , so daß [vgl. (14a) und (14b)]

$$(\varphi_0 - \pi + 2(v + \mu)\chi) - (\varphi_0 + \pi + 2v\chi) = 2(\mu\chi - \pi) = 0$$

$$(v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

oder

$$\chi = \frac{\pi}{\mu}$$

wird. Die beiden Integrale  $w_{B_1}$  und  $w_{B_2}$  werden dann bis auf das Vorzeichen einander gleich und tilgen sich in  $w$  gegenseitig. Dies besagt aber, daß in einem durch

$$\chi = \frac{\pi}{\mu}$$

bestimmten Winkelspiegel keine Beugungserscheinungen zu beobachten sind.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß wir die Funktion  $u$  auch ohne jede Rechnung hätten herstellen können. In § 5 haben wir ja die Eigenschaften angegeben, die  $u$  vollständig eindeutig bestimmen, und durch Betrachtung der Struktur der Funktion  $w$  hätten wir dann aus ihren Bestandteilen unmittelbar eine diesem Eindeutigkeitssatze entsprechende Funktion  $u$  angeben können.

Zum Schlusse wollen wir noch die Frage nach dem Elementargesetze der Sommerfeldschen Beugungswellen  $w_{B_1}$  und  $w_{B_2}$  streifen. Indem wir in  $w_{B_1}$  und  $w_{B_2}$  durch die in § 6 benutzte Substitution in entsprechender Weise statt  $a$  die Integrationsvariable  $s$  einführen, erhalten wir ein Elementargesetz, das für den Sonderfall  $\chi = \pi$  mit dem von uns als Youngsches bezeichneten übereinstimmt. Offenbar kommt aber diesem übrigens ziemlich kompliziert gebauten Elementargesetze, außer für den gerade betrachteten Keil, keine weitere Bedeutung zu. Selbst für  $\chi = 2\pi$ , d. h. im Falle der Halbebene läßt sich dieses Elementargesetz zur synthetischen Lösung neuer Beugungsprobleme nicht unmittelbar verwenden. Die Ursache dafür besteht darin, daß bei exakter Behandlung im Sommerfeldschen Sinne nicht mehr der Sprung von  $u$  bzw.  $\partial u / \partial n$  am Schirme in Betracht gezogen wird, sondern die Lösung  $u$  selbst (bzw.  $\partial u / \partial n$ ) hier ganz bestimmte Bedingungen

$$\left( u = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right)$$

zu erfüllen hat. Die dadurch verursachte Schwierigkeit kann man sich am einfachsten im zweidimensionalen Falle klar machen, wo sie im wesentlichen bereits vorhanden ist, wenn man etwa aus den einfallenden, reflektierten und den (der Lösung für die Halbebene entsprechenden) Sommerfeldschen Beugungswellen das Beugungsproblem für einen Spalt oder

$$\underline{S_1} \quad \underline{B_1} \quad \underline{B_2} \quad \underline{S_2}$$

Fig. 7 a.

$$\underline{U_1^*} \quad \underline{B_1^*} \quad \underline{S^*} \quad \underline{B_2^*} \quad \underline{U_2^*}$$

Fig. 7 b.

einen beugenden Streifen lösen will. Im Falle des Spaltes (Fig. 7 a) wird dann durch die von der beugenden Kante  $B_1$  ( $B_2$ ) ausgehende Beugungswelle die Randbedingung an dem Schirme  $S_2$  ( $S_1$ ) nicht erfüllt, während im Falle des Streifens (Fig. 7 b) die von der beugenden Kante  $B_1^*$  ( $B_2^*$ ) ausgehende Welle zwar die Randbedingung an dem Schirme  $S^*$  befriedigt, in der Geraden  $B_2^* U_2^*$  ( $B_1^* U_1^*$ ) hingegen sich unzulässigerweise unstetig verhält.

München, Inst. f. theoret. Physik, im Juli 1917.

(Eingegangen 28. Juli 1917.)

#### *Nachschrift bei der Korrektur.*

Die zu Anfang des § 4 erwähnte Tatsache, daß  $u_{\text{phys.}}$  in dem Schirme  $S$  einen Sprung um den Wert der Lichterregung erleidet, die hier bei Abwesenheit des Schirmes  $S$  vorhanden wäre, läßt sich folgendermaßen einfach erschließen: Die die Lichterregung darstellende Funktion ist nach (1) gleich dem über die ganze Fläche  $\mp + S$  erstreckten Kirchhoffschen Integrale;  $u_{\text{phys.}}$  ist mithin gleich der, die Lichterregung darstellenden Funktion vermindert um das über  $S$  erstreckte Kirchhoffsche Integral; und dies ist eine Darstellung von  $u_{\text{phys.}}$ , die im ganzen Definitionsbereiche dieses Zweiges der Funktion  $u$  gilt. Da nun das über die Fläche  $S$  erstreckte Integral in  $S$  den erwähnten Sprung erleidet — eine Folgerung der zu Anfang des § 1 angeführten Sätze — während die die Lichterregung darstellende Funktion in  $S$  regulär bleibt, ist die obige Behauptung auf diese Weise wohl einfach erwiesen.