

Sonderdruck aus der Physikalischen Zeitschrift

Verlag von S. Hirzel in Leipzig

A. Rubinowicz

Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des
Impulsmomentes

Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes¹⁾.

Von A. Rubinowicz.

Die Bohr-Sommerfeldsche Theorie der wasserstoffähnlichen Serienspektren fußt im wesentlichen auf zwei Annahmen:

Die erste bestimmt in der Mannigfaltigkeit der möglichen Elektronenbahnen durch Quantenbedingungen eine diskrete Schar „stationärer“ Zustände. Gemäß der zweiten Voraussetzung strahlt ein Elektron, das aus einer Quantenbahn A in die Bahn E übergeht, eine monochromatische Lichtwelle aus, deren Frequenz ν durch die Bohrsche Frequenzbedingung

$$h\nu = W_A - W_E \quad (1)$$

gegeben ist. W_A und W_E sind die den beiden Quantenzuständen A und E entsprechenden Energiewerte.

Für den uns zunächst interessierenden Fall, daß kein äußeres Feld auf das Atom einwirkt, wird eine stationäre Bahn durch die „azimutale“ und die „radiale“ Quantenbedingung

$$\int_0^{2\pi} \dot{p}_\varphi d\varphi = 2\pi p_\varphi = nh, \quad \int p_r dr = n' h$$

festgelegt.

Unsere Überlegungen knüpfen an die Tat-

1) Als die vorliegende Arbeit schon fertiggestellt war, erschien der erste Teil einer Abhandlung von N. Bohr (On the Quantum Theory of Line-Spectra, Kopenhagener Akademie 1918), in deren Fortsetzung aus der Forderung, daß im Grenzfalle langer Wellen die klassische Elektronen- und die neuere Quantentheorie miteinander übereinstimmen müssen, u. a. vermutlich auch die hier erhaltenen Ergebnisse abgeleitet werden dürften. Auf die Bedeutung unserer Beziehung (6) für den Fall zirkular-polarisierter Wellen wird bereits am Schlusse des erschienenen ersten Teiles der Bohrschen Abhandlung hingewiesen. Auf den Rat von Herrn Prof. Sommerfeld, dem ich auch hier für sein freundliches Interesse an der vorliegenden Arbeit danken möchte, habe ich mich aber dennoch mit Rücksicht auf die prinzipielle Bedeutung, die bei uns dem Satze von der Erhaltung des Impulsmomentes beigemessen wird, und auf unsere mehr axiomatische Begründung der Resultate zur Publikation meiner Arbeit entschlossen.

sache an, daß das für die stationäre Bahn A (Quantenzahlen m, m') durch

$$p_\varphi = \frac{mh}{2\pi}$$

gegebene Impulsmoment des Atoms beim Übergange des Elektrons in die Bahn E (Quantenzahlen n, n') sich im allgemeinen ändern wird. Da nach der klassischen Elektrodynamik für das System:

„Atom + das beim Elektronenübergange ausgestrahlte elektromagnetische Feld“

der Satz von der Erhaltung des Impulsmomentes gelten sollte, so entsteht für uns die Frage, inwieweit dieser ganz fundamentale, in seiner Bedeutung weit über die klassische Elektrodynamik hinausragende Satz auch bei einer solchen Bohrschen Ausstrahlung erfüllt ist, d. h. inwieweit die aus diesem Satze gezogenen Folgerungen, die vor allem in einem Auswahlprinzip und in einer, wenn auch nicht ganz vollständigen Polarisationsregel gipfeln, sich an den spektroskopischen Beobachtungen bestätigen lassen.

Wir erörtern im folgenden zunächst die Verhältnisse bei Abwesenheit eines äußeren elektrischen oder magnetischen Feldes. Von den hier erhaltenen Ergebnissen läßt sich direkt an der Erfahrung nur das Auswahlprinzip an den Feinstrukturen der Balmer- und der Helium-Linien prüfen. Es ist sehr bemerkenswert, daß unser Auswahlprinzip im allgemeinen, wenn auch nicht inhaltlich, so doch wenigstens praktisch, die „exaktere Fassung“ der Sommerfeldschen Quantengleichungen:

$$m' > n' \text{ ausnahmslos gültig,}$$

$$m \geq n \text{ im allgemeinen gültig}$$

zu ersetzen vermag. Nur die schwächste, am weitesten gegen Rot hin gelegene Komponente im Gleichstrombilde der Heliumlinien 4686 Å.-E. und 3203 Å.-E. dürfte nach dem zunächst erhaltenen Auswahlprinzip nicht beobachtbar sein, was sich dann später bei Erörterung des Stark-Effektes zwanglos durch den Einfluß

des elektrischen Feldes (das ja bei jeder Entladung vorhanden ist) erklären läßt. Dasselbe gilt von der großen Anzahl der Komponenten in der mit Funkenanregung erhaltenen Feinstruktur der Heliumlinie 4686.

Einen schönen Erfolg unserer Theorie liefert ihre Anwendung auf den Zeeman-Effekt. Wir sind hier nicht nur imstande, das Fehlen der nach der Sommerfeld-Debyeschen Theorie zu erwartenden überzähligen Linien zu erklären, sondern können auch bis zu einem gewissen Grade über die Polarisationsverhältnisse (Auftreten und Lage der zirkularpolarisierten Komponenten) Aufschluß erteilen.

Beim Stark-Effekt erhalten wir vor allem eine Erklärung der Epsteinschen Polarisationsregel.

Wenn wir im folgenden unsere Überlegungen stets so anstellen, als ob das übergehende Elektron ganz nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlen würde, so ist dies in Wirklichkeit nur ein Zugeständnis an unsere Bequemlichkeit, nicht aber jene Auffassung des Sachverhaltes, die wir hier vertreten möchten. Wir wollen uns vielmehr das Atom und den durch die Maxwell'schen Gleichungen beherrschten Äther als ein einziges einheitliches System denken, für das uns als Ideal die Aufstellung einer einheitlichen Quantenbedingung vorschwebt. Dies läßt sich jedoch vorläufig noch nicht durchführen, da wir die gegenseitige Beeinflussung, also sozusagen die Koppelung, der beiden Einzelsysteme nicht kennen. Wir kommen auf diesem Wege jedoch schon ein beträchtliches Stück vorwärts, wenn wir von der Koppelung nur voraussetzen, daß sie das Erfülltsein der Sätze von der Erhaltung der Energie und des Drehimpulses für das System „Atom + Äther“ gewährleistet. Zum Beweise der Bohrschen Frequenzbedingung genügt schon die speziellere Annahme, daß allein der Energiesatz beim Strahlungsvorgange besteht, wobei noch die Voraussetzungen notwendig sind, daß vor der Ausstrahlung das Atom in irgendeinem Quantenzustande sich befindet und nach der Ausstrahlung, wo Atom und Äther aufeinander nicht mehr einwirken, sowohl das Atom, als auch die forteilende Strahlung, jedes für sich, gequantelt sind und daß ein „Ätheroszillator“ nur ein einziges Energiequantum aufnehmen kann¹⁾. In der vorliegen-

1) Vgl. L. Flamm, diese Zeitschr. 19, 116, 1918 und die Ansprache von Prof. Sommerfeld bei der Planck-Feier in der Deutsch. Phys. Ges. zu Berlin am 26. April 1918 (inzwischen erschienen in der Broschüre: Zu Max Plancks sechzigstem Geburtstag, Karlsruhe

den Mitteilung wollen wir nun aber die Konsequenzen der weiteren Annahme ziehen, daß für das System „Atom + Äther“ auch der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses gilt.

Von unserem Standpunkte aus denken wir uns, daß das strahlende Atom dem Äther einen gewissen Betrag an Energie und Impulsmoment zur freien Verfügung überläßt und daß die eigentliche Ursache für den Schwingungscharakter im Äther und nicht im Atom gelegen ist. Bei dem Strahlungsvorgang entsteht für den Äther die Aufgabe, gemäß den Maxwell'schen Gleichungen eine Welle zu formen, die die verfügbaren Energie- und Impulsgrößen aufnimmt. Diese Welle sowie die Gültigkeit der Maxwell'schen Gleichungen im Äther ist nach unserer Auffassung physikalisch gesichert. Wenn wir weiterhin diese entstehende Welle auch durch eine Elektronenschwingung am Orte des Atoms im Sinne der Theorie des Hertz'schen Dipols beschreiben werden, so halten wir diese an das klassisch strahlende Elektron anknüpfende Vorstellung nicht für physikalisch wirklich. Sie ist, wie wir oben sagten, nur ein Zugeständnis an unsere Bequemlichkeit. In der Tat können wir auf Grund der in der klassischen Theorie ausgearbeiteten Formeln am einfachsten und plausibelsten die Singularitäten angeben, die am Orte des leuchtenden Atoms vorhanden sein müssen. Die eigentliche Ursache für das Entstehen der Lichtwelle sehen wir dagegen in der quantenmäßigen Zustandsänderung des Atoms. Um stets im Auge zu behalten, daß wir bei den folgenden Erörterungen das nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlende Elektron einzig nur im Sinne der obigen Auffassung verwenden, wollen wir es zeitweilig auch als das „Ersatzelektron“ bezeichnen.

Es ist selbstverständlich, daß wir im Sinne der Bohrschen Frequenzbedingung die beim Elektronenübergange entstehende Kugelwelle uns streng monochromatisch denken und daher unser Ersatzelektron rein harmonisch schwingen lassen. Dessen ungeachtet legen wir den Betrachtungen der beiden ersten Paragraphen eine beliebige periodische Umlaufbahn des Ersatzelektrons zugrunde, um mit Rücksicht auf die Feinstruktur der Heliumlinie 4686 Å.-E. zu zeigen, daß wir das Auswahlprinzip (12) nicht umgehen können, auch wenn wir unsere Auffassung des Strahlungsvorganges aufgeben, und uns vorstellen, daß der Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn in eine

1918, Verlag der C. F. Müllerschen Hofbuchhandlung), wo diese Überlegungen des Verfassers mitgeteilt und als Verhöhnung der Undulations- und Quantenhypothese gedeutet wurden.

andere in irgendeiner Weise, etwa in einer Spiralbahn erfolgt, wobei das Elektron nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlt. Unser Auswahlprinzip (12) wird nämlich, wie wir zeigen, auch unter der Annahme erhalten, daß das strahlende Elektron eine beliebige periodische Bahn durchläuft, deren Größe und Gestalt sich auch langsam ändern kann.

§ 1. Zusammenhang zwischen der Ausstrahlung von Energie und Drehimpuls bei einer elektromagnetischen Kugelwelle. Wir betrachten das Strahlungsfeld eines in einer geschlossenen Bahn mit der Periode $\tau = 1/\nu$ sich bewegenden Elektrons, das wir uns durch einen entsprechenden Hertzischen Oszillator ersetzt denken, und wollen eine Beziehung zwischen dem Drehimpuls und der Energie, die die von diesem Oszillator entsandte elektromagnetische Welle trägt, kennen lernen¹⁾.

Der die Lage des Elektrons bestimmende Radiusvektor \vec{s} wird sich durch eine Fouriersche Reihe

$$\vec{s} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi\nu n t + b_n \sin 2\pi\nu n t) \quad (2)$$

darstellen lassen, wo a_n und b_n von der Zeit unabhängige Vektoren bedeuten. In dem uns besonders interessierenden Falle eines harmonisch schwingenden Ersatzelektrons ist speziell

$$\vec{s} = a_1 \cos 2\pi\nu t + b_1 \sin 2\pi\nu t. \quad (3)$$

Nach M. Abraham²⁾ ist dann der von unserem Elektron in der Sekunde ausgestrahlte Drehimpuls, wie man unschwer aus dem ausgestrahlten Felde berechnet, gleich

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} [\dot{\vec{s}} \ddot{\vec{s}}] \quad (4)$$

während nach Hertz die sekundlich ausgestrahlte Energie³⁾

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{s}}^2$$

beträgt. Mithin wird während einer Schwingung an Drehimpuls

$$\Delta\mathcal{J} = \int_0^{1/\nu} \frac{2e^2}{3c^3} [\dot{\vec{s}} \ddot{\vec{s}}] dt = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(2\pi\nu)^3}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 [a_n b_n]$$

und an Energie

$$\Delta W = \int_0^{1/\nu} \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\vec{s}}^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(2\pi\nu)^4}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \frac{(a_n^2 + b_n^2)}{2}$$

ausgestrahlt. Zwischen $|\Delta\mathcal{J}|$ und ΔW besteht demnach die Beziehung:

$$|\Delta\mathcal{J}| = \frac{\Delta W}{2\pi\nu} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)} \quad (5)$$

Selbstverständlich kann unter $|\Delta\mathcal{J}|$ auch der während einer hinreichend viele Schwingungen umfassenden Zeit ausgestrahlte Drehimpuls und unter ΔW die in der gleichen Zeit ausgestrahlte Energie verstanden werden. Schließlich bleibt (5) angenähert auch richtig, wenn die Vektoren a_n und b_n nicht, wie wir es vorausgesetzt haben, von der Zeit unabhängig sind, sondern sich mit der Zeit langsam ändern und wir $|\Delta\mathcal{J}|$ und ΔW für ein Zeitintervall nehmen, in dem zwar a_n und b_n merklich konstant sind, das andererseits aber gegenüber $1/\nu$ doch schon hinreichend groß ist. (5) gilt mithin, auch wenn das Elektron in einer Spiralbahn läuft, die durch langsame Änderung der Größe und Gestalt einer geschlossenen, periodischen Bahn entsteht.

Für den Fall einer rein zirkularen Schwingung des Elektrons, wo a_1 senkrecht zu b_1 steht und beide ihrem absoluten Betrage nach gleich sind, während sonst

$$a_n = b_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

ist, wird (5) gleich

$$|\Delta\mathcal{J}| = \frac{\Delta W}{2\pi\nu} \quad (6)$$

und läßt sich für diesen Sonderfall nach H. Busch¹⁾ einfach aus dem Energiesatze ableiten. Wir bemerken aber, daß während bei der früher angedeuteten Ableitung die Beziehung (5) aus dem ausgestrahlten Felde allein erhalten werden kann, bei der energetischen Ableitung von (6) die Vorstellung eines Ersatzelektrons nicht gut auszuschalten ist.

§ 2. Die Bohrsche Frequenzbedingung und der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses. Auswahlprinzip. Wir stellen die folgenden Überlegungen unter der Annahme an, daß unser Atom weder der Einwirkung eines elektrischen, noch der eines magnetischen Feldes unterliegt. Das Impulsmoment des Atoms vor und nach der Ausstrahlung möge durch die Vektoren \mathfrak{p}_m und \mathfrak{p}_n mit den Absolutbeträgen $\frac{mh}{2\pi}$ und $\frac{n\hbar}{2\pi}$ gegeben sein. Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen \mathfrak{p}_m und \mathfrak{p}_n so verliert das Atom bei einem Elektronenübergang ein Impulsmoment $\Delta\mathcal{J}$ vom absoluten Betrage

1) H. Busch, l. c. und M. Abraham, diese Zeitschr. 15, 914, 1914.

1) M. Abraham, diese Zeitschr. 15, 914, 1914; H. Busch, diese Zeitschr. 14, 455, 1913.

2) M. Abraham, l. c.

3) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. 2, 3. Aufl., S. 63. Leipzig 1914.

$$A\mathcal{D} = |p_m - p_n| = \frac{h}{2\pi} \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} \quad (7)$$

und die Energie

$$\Delta W = W_{m, m'} - W_{n, n'} \quad (8)$$

Nach (5) haben wir also:

$$h\nu \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} = (W_{m, m'} - W_{n, n'}) \cdot \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)}$$

Dies kann aber mit der Bohrschen Frequenzbedingung (1) nur dann in Einklang gebracht werden, wenn

$$\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} = \frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)} \quad (9)$$

ist. Es ist jedoch offenbar

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 |a_n b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 |a_n| \cdot |b_n|$$

und da

$$2 |a_n| \cdot |b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$$

und daher auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 n^3 |a_n| \cdot |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)$$

so ist

$$\frac{\left| \sum_{n=1}^{\infty} n^3 2 [a_n b_n] \right|}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (a_n^2 + b_n^2)} \leq 1. \quad (10)$$

Mit Rücksicht auf

$$|m - n| \leq \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} \quad (11)$$

ergibt sich daher aus (9) und (10):

$$|m - n| \leq 1. \quad (12)$$

d. h. $m - n = -1, 0, +1$.

Wir erhalten daher zunächst als Resultat das folgende Auswahlprinzip:

Ein mit Ausstrahlung verbundener Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn (m, m') in eine andere (n, n') ($m + m' > n + n'$) kann nicht in beliebiger Weise erfolgen, sondern ist an die Bedingung geknüpft, daß sich dabei die das Impulsmoment des Atoms bestimmende azimutale Quantenzahl m höchstens um eine Eins ändert.

Dieses Resultat gilt offenbar nicht nur für

die wasserstoffähnlichen Spektren, sondern ganz allgemein für alle Fälle wo kein äußeres Feld vorhanden ist und von allen das Atom konstituierenden Elektronen nur eines in eine neue stationäre Bahn übergeht. Es bleibt schließlich, wie wir in der Einleitung hervorgehoben haben, auch richtig, wenn wir uns denken, daß der Übergang des Elektrons in einer in § 1 näher charakterisierten Spiralbahn erfolgt.

§ 3. Polarisationsverhältnisse. Doch auch über den Zusammenhang zwischen den Polarisationsverhältnissen der emittierten Strahlung und der Lage der Anfangs- und der Endbahn des Elektrons können wir leicht einigen Aufschluß gewinnen. Von den drei in (12) enthaltenen Möglichkeiten betrachten wir zunächst die beiden Fälle

$$m - n = \pm 1, \quad (13)$$

die ersichtlich nur dann bestehen können, wenn in den beiden Ungleichungen (10) und (11) die Gleichheitszeichen gelten. Da für $n \leq 2$ jedesmal wenn a_n und b_n nicht beide zugleich verschwinden,

$$n^3 2 |a_n| \cdot |b_n| < n^4 (a_n^2 + b_n^2)$$

so erfordert (10) offenbar daß

$$a_n = b_n = 0 \text{ für alle } n = 2, 3, 4, \dots$$

und daß

$$2 |a_1 b_1| = a_1^2 + b_1^2$$

d. h. daß die Vektoren a_1 und b_1 ihrem absoluten Betrage nach gleich groß sind und zueinander senkrecht stehen. Das Ersatzelektron bewegt sich also im Falle (13) auf einem Kreise und sendet streng monochromatisches zirkular-polarisiertes Licht aus. Das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (11) verlangt dann, daß $\vartheta = 0$ ist, d. h. daß die stationären Anfangs- und Endbahnen in der gleichen Ebene liegen. Da das ausgestrahlte Impulsmoment auch vektoriell mit dem beim Elektronenübergange vom Atome verlorenen übereinstimmen muß, läuft jetzt unser Ersatzelektron in der gemeinsamen Ebene der stationären Anfangs- und Endbahn. Damit sind aber in diesen beiden Fällen selbst bei Mitberücksichtigung der allgemeinen Elektronenbahnen (2) die Polarisationsverhältnisse vollkommen bestimmt.

Nicht ebenso eindeutig festgelegte Resultate erhalten wir in dem noch zu betrachtenden Falle

$$m - n = 0$$

auch dann nicht, wenn wir im Sinne der Einleitung von der Betrachtung allgemeinerer als harmonischer Schwingungen des Ersatzelektrons absehen und uns auf die Betrachtung des Elektrons in der Grundschiwingung beschränken. Für die allgemeinere Bahn (2) und die speziel-

lere (3) ergibt sich aus (9) und (10) in beiden Fällen nur die gleiche, die Größe des Winkels ϑ einschränkende Relation

$$1 \geq \cos \vartheta > 1 - \frac{1}{2n^2}. \quad (14)$$

(9) liefert dann für jeden der Ungleichung (14) entsprechenden Winkel ϑ im Falle der Bahn (2) nur ein ungefähres Maß für die Abweichung der Bahnkurve des strahlenden Elektrons von der Kreisform. In dem für uns eigentlich wichtigen Falle der rein harmonischen Schwingung des Ersatzelektrons wird durch (9) dagegen jedem nach (14) zulässigen Winkel ϑ eine bestimmte, mit kleiner werdendem ϑ abnehmende Exzentrizität der Bahnellipse zugeordnet. Insbesondere entspricht

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2n^2} \text{ nach (7) } |p_m - p_n| = \frac{h}{2\pi}$$

also, wie soeben gezeigt, einer zirkular-polarisierten Lichtwelle, während in dem anderen Grenzfall von (14) ($\cos \vartheta = 1$) aus (9) $[a_1 \ b_1] = 0$ folgt, d. h. a_1 und b_1 haben die gleiche Richtung, das Elektron strahlt also linear-polarisiertes Licht aus. Wir bemerken, daß im Zeeman-effekt (s. u. § 7) für $m-n=0$ eben der letztere Grenzfall der wirkliche zu sein scheint. Was nun die räumliche Lagerung der im Falle $m-n=0$ von unserem harmonisch schwingenden Ersatzelektron ausgesandten elliptisch-polarisierten Welle betrifft, so wird durch die Forderung, daß das beim Elektronenübergange vom Atome abgegebene Impulsmoment auch seiner Richtung nach sich in der ausgestrahlten Kugelwelle wiederfinden soll, nur die Lage der Normalen auf die Ebene der elliptischen Bahnkurve unseres Ersatzelektrons bestimmt. Die Lage der Achsen dieser Ellipse ist dadurch noch keineswegs gegeben. Wir können daher aus unseren Überlegungen im Grenzfall $\cos \vartheta = 1$, wo die Ebenen der Anfangs- und Endbahn zusammenfallen und dadurch auch noch die Lage dieser Normalen unbestimmt wird, über die räumliche Orientierung der jetzt zu einer Geraden ausgearteten Ellipse überhaupt nichts aussagen.

§ 4. Energetische Ableitung der Polarisationsverhältnisse für den Fall der zirkular-polarisierten Welle. Die obigen auf zirkularpolarisierte Wellen¹⁾ bezüglichen Überlegungen lassen sich zum großen Teile schon aus unserer Annahme herleiten, daß bei einem mit der Ausstrahlung einer solchen Lichtwelle verbundenen Elektronenübergange der gesamte freiwerdende Über-

1) Als zirkular-polarisierte Wellen bezeichnen wir abkürzend stets Kugelwellen, die von einem zirkular schwingenden Ersatzelektron emittiert gedacht werden können.

schuß an Energie und Drehimpuls an die entstehende (nach der Bohrschen Frequenzbedingung) 'monochromatische Lichtwelle übergeht und daß die schon aus energetischen Betrachtungen für das Ersatzelektron sich ergebende Beziehung (6) erfüllt ist.

Für zirkular-polarisiertes Licht folgt nämlich aus (6), (7) und (8) mit Rücksicht auf die Bohrsche Frequenzbedingung zunächst

$$\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \vartheta} = 1, \quad (15)$$

was zusammen mit (11) das Auswahlprinzip (12) gibt. Im Falle $m-n=+1$ der Ungleichung (12) liefert dann (15) $\vartheta=0$, d. h. die stationären Anfangs- und Endbahnen liegen in der gleichen Ebene. Daraus folgt aber nach (7), daß das Atom beim Strahlen einen Drehimpuls verliert, dessen Achse senkrecht auf dieser Ebene steht, womit die Orientierung der zirkular-polarisierten Welle im Raume gegeben ist. Für $m-n=0$ wird, wenn zirkular-polarisiertes Licht emittiert werden

soll, ϑ nach (15) durch $\cos \vartheta = 1 - \frac{1}{2n^2}$ bestimmt.

Wie wir bereits bemerkt haben, zeigt jedoch die Erfahrung am Zeeman-effekt, daß gerade im Falle $m-n=0$ linear-polarisiertes Licht ausgesendet wird. In diesem Falle wird aber überhaupt kein Drehimpuls ausgestrahlt, und die jetzt eben gemachten Überlegungen sind daher hier nicht anwendbar.

Man kann selbstverständlich jetzt die Voraussetzungen und Folgerungen teilweise umkehren und für zirkular-polarisiertes Licht und den Sonderfall $m-n=+1$ die Bohrsche Frequenzbedingung auch auf diesem Wege beweisen. Die wahre Ursache für ihr Bestehen sehen wir aber im Sinne der Einleitung in der Möglichkeit, den Äther zu quanteln.

Wenn wir auch auf dem jetzigen Wege unsere früheren Ergebnisse im wesentlichen wieder erhalten, so hat sich doch der frühere umständlichere, mehr ins Einzelne gehende Weg schon deshalb nicht als überflüssig erwiesen, als wir uns dort überzeugen konnten, daß unserem Auswahlprinzip (12) eine viel umfassendere Bedeutung zukommt, als es nach unseren letzten Erörterungen scheinen könnte, in denen (12) nur als eine einschränkende Bedingung für den Sonderfall zirkular-polarisierter Wellen auftritt. Die formelle Übereinstimmung des jetzigen und des früheren Auswahlprinzipes ist offenbar in dem Umstand begründet, daß die Kreisbahnen bei gegebener Frequenz und gegebener ausgestrahlter Energie den größten Betrag an Drehimpuls aussenden. Nach den Überlegungen des § 2 hat ja das

Verhältnis $\frac{|\Delta \mathcal{D}|}{\Delta W}$ [vgl. Formel (10)] für eine Kreisbahn den größten Betrag.

§ 5. Feinstruktur der wasserstoff-ähnlichen Spektrallinien. Unsere obigen Überlegungen beziehen sich zunächst auf Atome, die nicht der Einwirkung eines elektrischen oder magnetischen Feldes unterworfen sind. Die hier erhaltenen Folgerungen lassen sich somit unmittelbar nur soweit sie sich auf das Auswahlprinzip (12) beziehen, an der Feinstruktur der H -Balmerlinien und der Linien des ionisierten Heliums (im folgenden stets als He_+ -Linien bezeichnet) prüfen. Die auf die Polarisation des von dem Atome ausgesandten Lichtes bezüglichen Resultate können jedoch in unserem Falle, wo ein äußeres Feld nicht vorhanden ist, und die stationären Bahnen mithin keine bestimmte räumliche Lagerung besitzen, zunächst nicht unmittelbar mit der Erfahrung verglichen werden. Dies wird erst ermöglicht, wenn wir in den folgenden Paragraphen unsere ganze Theorie auf den Fall des Zeeman- und des Starkeffektes verallgemeinern. In dem zunächst Folgenden besprechen wir die Feinstrukturen.

Beim Übergange des Elektrons aus der Quantenbahn m, m' in die Bahn n, n' ($m + m' > n + n'$) müßte bei Berücksichtigung des Einflusses der relativistischen Massenveränderlichkeit, bei Ausschluß der Pendelbahnen und bei Nichtvorhandensein eines sonstigen Auswahlprinzips die entstehende Spektrallinie aus $(m + m')$ ($n + n'$) Komponenten bestehen, wie dies bei der Funkenanregung der Heliumlinie 4686 in der Tat der Fall zu sein scheint.

Zur Bezeichnung der einzelnen Komponenten wollen wir nach Paschen¹⁾ und Sommerfeld²⁾ das ganze Liniengebilde zunächst entsprechend der Vielfachheit der Endbahn in $n + n'$ Gruppen I, II, III, ... teilen und in diesen, je nach der Vielfachheit der Anfangsbahn, die $m + m'$ Komponenten a, b, c, \dots unterscheiden, beide Male im Sinne wachsender radialer Quantenzahl (von 0 bis $n + n' - 1$ bzw. bis $m + m' - 1$) also von der Kreisbahn zur Ellipse größter Exzentrizität hin gezählt.

Unser Auswahlprinzip

$$|m - n| \leq 1$$

besagt nun offenbar, daß jedem n höchstens drei Werte m entsprechen können, d. h. von allen Linien der Liniengruppen I, II, III, ... können höchstens je drei Linien sichtbar sein. Dieses Auswahlprinzip ist offenbar seinem Wesen nach verschieden von den Sommerfeldschen Quantenungleichungen, die aus den Versuchsergebnissen Paschens abgeleitet

sind. Dennoch werden wir uns gleich an Beispielen überzeugen können, daß auch unser Auswahlprinzip — mit Ausnahme je einer Komponente der Heliumlinien 4686 und 3203 — praktisch die „exaktere“ Fassung der Sommerfeldschen Quantenungleichungen zu ersetzen und demnach sonst im allgemeinen die Paschenschen Gleichstromfeinstrukturen gut wiederzugeben vermag.

In den folgenden, im wesentlichen aus der Sommerfeldschen Abhandlung entnommenen Figuren sind die durch die „exaktere“ Sommerfeldsche Quantenungleichung

$$\begin{aligned} m' > n' & \text{ ausnahmslos giltig,} \\ m > n & \text{ im allgemeinen giltig} \end{aligned}$$

ausgeschlossenen Linien punktiert eingezeichnet, Linien, die nach der „gröberen“ Quantenungleichung

$$m' > n' \text{ und } m > n \text{ ausnahmslos giltig}$$

fortfallen sollten, nach der exakteren aber doch noch möglich sind, durch einen kurzen Pfeil angedeutet. Die nach den beiden obigen Quantenungleichungen möglichen Linien sind ausgezogen. Ihre Länge ist proportional ihrer vermutlichen Intensität. Eine unter der Bezeichnung der Linie angebrachte Ziffer 0 oder 1 bedeutet, daß die Linie durch unser Auswahlprinzip (12) ausgeschlossen bzw. zugelassen wird.

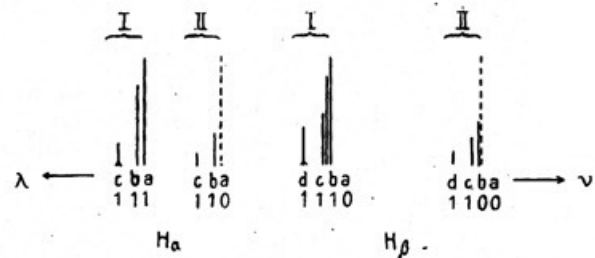


Fig. 1.

Wir betrachten zunächst die Balmerreihe des Wasserstoffs. Für H_α (Fig. 1) stimmt unser Schema mit dem Sommerfeldschen vollständig überein. Bei H_β (Fig. 1) sollte nach unserem Auswahlprinzip auch Ia und IIb fortfallen. Nach unserem Auswahlprinzip besteht überhaupt jede Linie der Balmerreihe aus drei Komponenten der Gruppe I und zwei der Gruppe II. Die Unterschiede gegenüber den Sommerfeldschen Quantenungleichungen sind aber experimentell nicht feststellbar, da die Einzelkomponenten jeder der Gruppen I und II bisher nicht aufgelöst werden konnten und die Gruppen I und II nur als je eine Linie beobachtet werden, zusammen also ein Dublett geben. Aber selbst die durch den Ausfall von Komponenten bedingte Änderung der Dublettweite dürfte versuchsmäßig kaum feststellbar sein, da die einzelnen Komponenten in den Gruppen I

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. 50, 901, 1916.

2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 51, 1, 1916.

und II mit wachsender Ordnungszahl der Linien immer näher aneinander rücken.

Sehr eingehend läßt sich dagegen unsere Theorie an den Feinstrukturen der He_+ -Linien prüfen. Diese Linien wurden bekanntlich früher als die erste und die zweite Nebenserie des Wasserstoffs beschrieben und werden ohne Rücksicht auf die Relativitätskorrektur durch die Formeln

$$\nu = 4N \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (16)$$

$$\nu = 4N \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (17)$$

dargestellt. Die Hauptlinie der Serie (16) ($m=4$) hat die Wellenlänge 4686 Å.-E. Ihre Feinstruktur (Fig. 2) wurde von Paschen¹⁾ sowohl bei Gleichstrom- als bei Funkenanregung überaus sorgfältig gemessen und bildet eine der stärksten Stützen der Sommerfeldschen Theorie. Mit Ausnahme von Id, wo, im Wider-

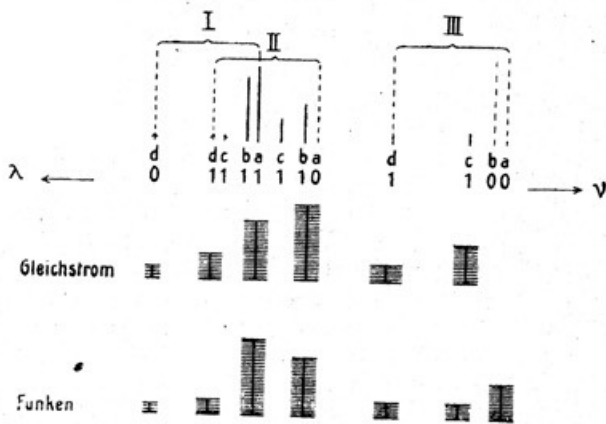


Fig. 2.

spruche mit dem Auswahlprinzip (12), $m-n=2$, werden sämtliche mit den Sommerfeldschen exakteren Quantenungleichungen verträglichen Linien auch hier durch unser Auswahlprinzip zugelassen. Die Tatsache, daß Id im Gleichstrombilde ganz deutlich (schwach auch im Funkenbilde) zu beobachten ist und daß ferner im Funkenbilde auch alle anderen nach (12) nicht zulässigen Komponenten beobachtet werden, zeigt uns handgreiflich, daß die Bedingungen für die Gültigkeit unseres, für ein kräftefreies Feld strenge Gültigkeit beanspruchenden Auswahlprinzipes (12) beim Experimente nicht immer erfüllt sind. Wir sehen den Grund hierfür in einer beginnenden Beeinflussung des Strahlungsvorganges durch das in jeder Geißleröhre stets vorhandene elektrische Feld, das, noch zu schwach um die Lage der Linien merklich zu verändern, sie gleichwohl wegen

1) F. Paschen, l. c.

des beim Starkeffekt gültigen Auswahlprinzips schon hervorzurufen vermag [vgl. § 8 Gl. (32)].

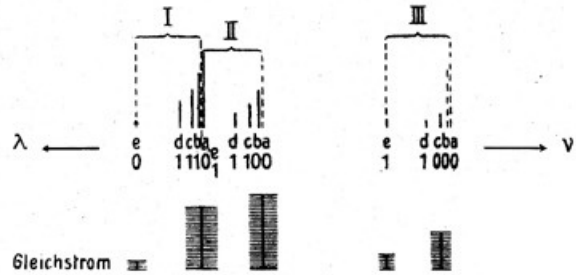


Fig. 3.

Auch bei der zweiten Linie der Serie (16) ($m=5$) mit der Wellenlänge 3203 Å.-E. ist die schwächste beobachtete Komponente Ie (Fig. 3) mit dem Auswahlprinzip (12) nicht verträglich, was wir hier ebenfalls als einen beginnenden Einfluß des Starkeffekts deuten. Die sonstigen aus der Fig. 3 zu entnehmenden Unterschiede gegen die Sommerfeldschen Quantenungleichungen lassen sich wohl an den Paschen'schen Beobachtungen kaum kontrollieren. Das gleiche gilt sicherlich auch von den übrigen Gliedern der Serie (16) sowie von der ganzen Serie (17).

§ 6. Über die Möglichkeit der Übertragung unserer Betrachtungen auf den Fall des Zeeman- und des Starkeffekts. Versucht man auf dem bereits beschrittenen Wege unsere Theorie für den Zeeman- und Starkeffekt zu verallgemeinern, so stößt man zunächst auf eine Schwierigkeit: Wenn ein äußeres Feld vorhanden ist, dann besteht der Satz von der Konstanz des Impulsmoments schon für das Atom allein im Falle des elektrischen Feldes nur für die eine, zur Feldrichtung parallele Komponente, im Falle des magnetischen Feldes aber überhaupt nicht mehr. In seiner vektoriellen, dreikomponentigen Form gilt ja dieser Satz allein für Systeme, die nur inneren Kräften unterworfen sind. Die hier auftretende Schwierigkeit steckt jedoch in Wirklichkeit nur in einer für unsere jetzigen Zwecke zu weit gehenden Idealisierung der tatsächlichen Verhältnisse und sie ist überwunden, wenn wir das Atom zusammen mit den das elektrische oder magnetische Feld erzeugenden Leitern und Magneten als ein System auffassen. Es muß also auch für den Fall des Zeeman- und des Starkeffekts möglich sein, grundsätzlich auf dem gleichen Wege, den wir bei nicht vorhandenem äußeren Felde gegangen sind, zu einem Auswahlprinzip und zu einer Polarisationsregel zu gelangen.

Der eigentliche Weg zur Behandlung des

Zee man- und des Stark effekts besteht demnach in dem Grenzübergange aus einem Dreikörperproblem. Unser Ziel können wir aber auch bei diesem Vorgehen nur erreichen, wenn wir über die Art des Grenzübergangs und über den Impulsmomentaustausch zwischen Atom und felderzeugendem Körper während der Ausstrahlung gewisse Festsetzungen treffen. Wir versuchen es daher beim Zeeman effekt zunächst (§ 7) mit einem einfacheren Verfahren, nämlich mit der Annahme, daß das Auswahlprinzip und die Polarisationsregel bei Einwirkung des magnetischen Feldes ebenso lauten, wie sie sich aus unseren bisherigen Überlegungen bei den durch die gleichen Quantenzahlen bestimmten Übergängen des Elektrons für den Grenzfall eines „äußeren magnetischen Feldes von der Stärke Null“ ergeben. Diese Annahme wird der Erfahrung schon von vornherein wenigstens insoweit gerecht, als sowohl das Auswahlprinzip als auch die Polarisationsregel Dinge betreffen, die beim Zeeman effekt von der Stärke des magnetischen Feldes vollkommen unabhängig sind.

Auf den Fall des Stark effekts lassen sich, wie wir dies im § 8 auseinandersetzen werden, die obigen einfachen Überlegungen, was man schon von vornherein erkennen kann, nicht anwenden; hier sind wir gezwungen auf den zuerst angedeuteten Weg zurückzugreifen.

Im § 8 werden wir ferner auch auf die Bedeutung dieses prinzipiellen Weges für den Fall des Zeeman effekts zurückkommen und die beiden beim Zeeman effekt möglichen Wege miteinander vergleichen.

§ 7. Zeeman effekt. Die Quantelung des Zeeman effekts läßt sich in dem Falle eines „magnetischen Feldes von der Stärke Null“ mit Hilfe der räumlichen Polarkoordinaten¹⁾ r, φ, ϑ , deren Achse $\vartheta=0$ mit der Richtung des äußeren Feldes zusammenfällt, einfach durchführen. Um eine hinreichend genaue Quantelung im Falle der nicht verschwindenden magnetischen Feldstärke zu erzielen, genügt es dann im wesentlichen, dieses Koordinatensystem um die Richtung des Feldes \mathfrak{H} mit der Winkelgeschwindigkeit

$$f = \frac{e}{m} \cdot \frac{\mathfrak{H}}{c}$$

(e/mc spezifische Ladung des Elektrons, \mathfrak{H} magnetische Feldstärke) rotieren zu lassen, wobei die Richtungen der Winkelgeschwindigkeit und des Feldes miteinander übereinstimmen.

1) Im folgenden richten sich unsere Bezeichnungen nach A. Sommerfeld, diese Zeitschr. 17, 491, 1916. Die Quantentheorie des Zeeman-Effektes wurde gleichzeitig auch von P. Debye, diese Zeitschr. 17, 507, 1916 entwickelt.

Sind $p_r, p_\varphi, p_\vartheta$ die den Koordinaten r, φ, ϑ entsprechenden Impulse, so lauten für $\mathfrak{H}=0$ die Quantenbedingungen

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi d\varphi = n_1 h, \int p_\vartheta d\vartheta = n_2 h, \int p_r dr = n' h. \quad (18)$$

Sie bestimmen Ellipsen von genau den gleichen Abmessungen, wie unsere früheren zweidimensionalen Quantenbedingungen

$$2\pi p = n h, \int p_r dr = n' h,$$

wobei zwischen den „alten“ und den „neuen“ Quantenzahlen der Zusammenhang

$$n = n_1 + n_2, n' = n'$$

besteht. Durch (18) wird aber außerdem auch die räumliche Lage der Ellipsen festgelegt, und zwar so, daß die Normale auf die Ebene der jeweils durchlaufenen stationären Bahn mit der Richtung des magnetischen Feldes den durch

$$\cos \alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (19)$$

bestimmten Winkel α bildet. Da demnach $\cos \alpha$ von n' nicht abhängt, so sind die zugehörigen im ganzen $n = n_1 + n_2$ räumlichen Lagen einer durch die Quantenzahlen n, n' bestimmten gequantelten Ellipse unabhängig von n' und allein durch die azimutale Quantenzahl n , d. h. durch die Größe ihres Impulsmoments gegeben. Mit Rücksicht auf den (nach der klassischen Elektronentheorie bestehenden) nahen Zusammenhang zwischen dem Impuls- und dem magnetischen Moment ist mithin für die räumliche Lage der gequantelten Ellipse allein ihr magnetisches Moment maßgebend.

Für die Energie der Bahn n_1, n_2, n' gilt dann im Falle $\mathfrak{H}=0$ der Ausdruck

$$W_0 = \frac{N h}{(n_1 + n_2 + n')^2}$$

Ist aber das äußere Feld \mathfrak{H} von Null verschieden, so ist die Energie einer gequantelten Bahn durch¹⁾

$$W = W_0 + \frac{1}{2} p_z f$$

gegeben, wo $f = |\dot{j}|$ und p_z die Projektion des im rotierenden Bezugssystem räumlich konstanten Impulsmoments auf die Richtung des magnetischen Feldes bedeutet. Nun ist p_z seinem Vorzeichen nach²⁾ positiv oder negativ,

1) Vgl. A. Sommerfeld, diese Zeitschr. 17, 491, 1916. Diese Beziehung wird erhalten, wenn in dem letzten dort auf S. 493 gegebenen Ausdrucke für W aus der dortigen Beziehung (8) das p_z eingeführt wird. χ ist im rotierenden Bezugssysteme die dem Winkel φ im ruhenden Systeme entsprechende Koordinate.

2) Vgl. A. Sommerfeld, l. c. S. 493, Formel (8) und beachte die Tatsache, daß das dort benutzte System

je nachdem das Elektron um die positive Richtung des magnetischen Feldes im Sinne einer Rechts- oder Linksschraube sich bewegt. Da das stets positive Phasenintegral $\int p_x d\chi = n_1 h$ im Sinne des umlaufenden Elektrons zu nehmen ist, so gilt offenbar:

$$\int_0^{+\pi} p_x d\chi = + 2\pi \cdot p_x = n_1 h$$

wenn $\dot{\chi}$ und mithin p_x positiv sind und

$$\int_0^{-\pi} p_x d\chi = - 2\pi \cdot p_x = n_1 h$$

wenn $\dot{\chi}$ und mithin p_x negativ sind.

Es wird daher

$$W = W_0 \pm \frac{n_1 h}{4\pi} f$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem das Elektron um die Richtung des Feldes im Sinne einer Rechts- oder Linksschraube läuft. Die Schwingungszahlen der in einem magnetischen Felde ausgesandten Linien werden daher durch:

$$\nu = N \frac{1}{(n_1 + n_2 + n')^2} - \frac{1}{(m_1 + m_2 + m')^2} \pm \frac{e}{mc} \frac{H}{4\pi} (m_1 - n_1) \quad (20)$$

gegeben, wobei bezüglich der Wahl des Vorzeichens die obige Festsetzung zu beachten ist.

Wir kehren nun zur Betrachtung des Falles $\vartheta = 0$ zurück und wollen hier die Überlegungen des § 2 mit Rücksicht auf die räumliche Quantelung weiter fortführen.

Zunächst betrachten wir den Fall, wo

$$m - n = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) = \pm 1 \quad (21)$$

ist. Da hier nach § 2 die Anfangs- und die Endbahn in der gleichen Ebene liegen, so muß nach (19)

$$\frac{n_1}{n_1 + n_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (22)$$

sein. Den Gleichungen (21) und (22) wird zunächst offenbar entsprochen durch

$$\begin{cases} n_1 = m_1 = 0 \\ m_2 - n_2 = \pm 1, \end{cases} \quad (23a)$$

d. h. Anfangs- und Endbahn liegen in einer Ebene durch die Richtung des magnetischen Feldes. Setzt man nun $n_1 \neq 0$ und $m_1 \neq 0$ voraus, so folgt aus (21), indem man dort aus (22) $m_1 + m_2$ oder $n_1 + n_2$ einsetzt:

$$(m_1 - n_1) \frac{n_1 + n_2}{n_1} = (m_1 - n_1) \frac{m_1 + m_2}{m_1} = \pm 1,$$

von räumlichen Polarkoordinaten so beschaffen ist, daß der Richtung des magnetischen Feldes $\vartheta = 0$ ein Anwachsen des Winkels χ durch eine Rechtsschraube zugeordnet ist.

was nur für

$$\begin{cases} n_2 = m_2 = 0 \\ m_1 - n_1 = \pm 1 \end{cases} \quad (23b)$$

möglich ist. Dies bedeutet aber mit Rücksicht auf (19), daß die Anfangs- und Endbahnen des Elektrons jetzt in der Ebene senkrecht zur Feldrichtung liegen. Beachten wir noch die für $m - n = \pm 1$ im § 3 erhaltenen Ergebnisse, so können wir sagen: Bei Berücksichtigung der räumlichen Quantelung wird im Falle $m - n = \pm 1$ rein zirkular-polarisiertes Licht ausgestrahlt, wobei die Anfangs- und Endbahn, sowie die zirkulare Bahn des Ersatzelektrons alle in der gleichen Ebene liegen, die entweder durch die Richtung des magnetischen Feldes geht (Fall 23a) oder zu ihr senkrecht steht (Fall 23b). Der Fall (23b) entspricht den beiden äußeren, im Längseffekte zirkular-polarisierten Zeeman-komponenten. Der Fall (23a) kann aber in Wirklichkeit nicht vorkommen. Ihm entspricht ja die mittlere Triplettkomponente und diese müßte, wenn (23a) auftreten sollte, sowohl im Längs- als auch im Quereffekt, und zwar unpolarisiert bzw. nur teilweise polarisiert beobachtbar sein.

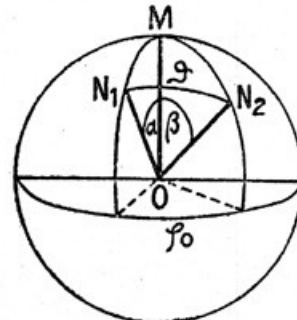


Fig. 4.

In dem noch zu betrachtenden Falle

$$m - n = (m_1 + m_2) - (n_1 + n_2) = 0 \quad (24)$$

muß nach (14) der von den Ebenen der Anfangs- und der Endbahn eingeschlossene Winkel ϑ der Ungleichung

$$\cos \vartheta \geq 1 - \frac{1}{2n^2} \quad (25)$$

entsprechen. Bezeichnen wir mit α und β die Winkel, die die Normalen ON_1 bzw. ON_2 (vgl. Fig. 4) auf die Ebenen der Anfangs- und der Endbahn mit der Richtung OM des Feldes einschließen und mit φ_0 den Winkel, den die Projektionen dieser Normalen auf die Ebene senkrecht zum Felde miteinander bilden, so ist

$$\cos \alpha = \frac{n_1}{n_1 + n_2}, \quad \cos \beta = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (26)$$

und aus dem Dreiecke $N_1 N_2 M$ folgt

$$\cos \vartheta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi_0.$$

(25) gibt somit

$$\frac{n_1 m_1 + \sqrt{n^2 - n_1^2} \sqrt{m^2 - m_1^2} \cos \varphi_0}{n^2} \geq 1 - \frac{1}{2n^2}$$

oder umgeformt:

$$-(n^2 - n_1^2)(n^2 - m_1^2) \sin^2 \varphi_0 - \frac{1}{4} \geq \geq n^2 [(n_1 - m_1)^2 - 1] + n_1 m_1. \quad (27)$$

Diese Ungleichung kann nur für

$$n_1 - m_1 = 0$$

erfüllt sein.

Da nämlich stets n_1 und m_1 gleiches Zeichen haben und mithin

$$n_1 m_1 > 0$$

ist, so müßte nach (27)

$$0 > n^2 [(n_1 - m_1)^2 - 1]$$

gelten, was offenbar nur für

$$m_1 - n_1 = 0 \quad (23c)$$

bestehen kann. Aus (24) und (26) folgt dann aber $\alpha = \beta$, d. h. für den Fall, daß sich bei der Strahlung des Atoms sein Impulsmoment nicht ändert, liegen die Ebene der Anfangs- und der Endbahn unter dem gleichen Winkel zur Richtung des magnetischen Feldes geneigt. Damit ist aber noch nicht gesagt, daß die beiden Ebenen miteinander auch zusammenfallen. Daher sind die Polarisationsverhältnisse durch die bisherigen Voraussetzungen noch nicht bestimmt und selbst aus der ad hoc gemachten Annahme, daß die Anfangs- und Endbahn in der gleichen Ebene liegen, folgt jetzt nur (vgl. § 3), daß unser harmonisch schwingendes Ersatzelektron rein linear-polarisiertes Licht aussendet (was ja beim Zeeman effekt in Wirklichkeit zutrifft), ohne daß wir aber die räumliche Lage der Geraden, in der unser Ersatzelektron schwingt, irgendwie festlegen könnten. Wir bemerken noch, daß auch aus der Voraussetzung $m - n = 0$ eindeutig als Folgerung $m_1 - n_1 = 0$ sich ergibt.

Die obigen für $\xi = 0$ abgeleiteten Ergebnisse sollen nun durch die schon früher angekündigte Annahme, daß sie auch in einem magnetischen Felde von nicht verschwindender Feldstärke unverändert bestehen bleiben, auf den wirklichen Fall des Zeeman effekts übertragen werden. Nach der von Sommerfeld und Debye entwickelten Theorie sollten nach (20), wie bekannt, neben dem beobachteten Triplet noch weitere in Wirklichkeit nicht beobachtete Linien auftreten, nämlich falls in (20) $|m_1 - n_1| > 1$ gesetzt wird. Selbst durch die Sommerfeldschen Quantenungleichungen kann diese Diskrepanz in der Balmer serie nur bei H_α behoben werden. Nach unseren Annahmen ist dagegen (vgl. 23 a, b und c).

$$|m_1 - n_1| \leq 1$$

und von der in (20) enthaltenen Mannigfaltigkeit von Linien kann daher nur das normale Triplet auftreten. Weiter ergibt sich jetzt im Falle $m_1 - n_1 = \pm 1$, d. h. im Falle der beiden äußeren Triplettkomponenten in vollständiger Übereinstimmung mit der Erfahrung nach (23 b) eindeutig die Erklärung der Tatsache, daß diese beiden Komponenten durch eine zirkulare Schwingung des Ersatzelektrons zustande kommen. Selbst der Sinn der zirkularen

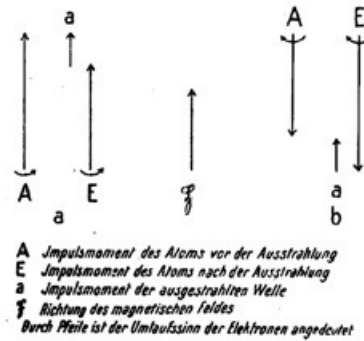


Fig. 5.

Polarisation läßt sich aus unseren Annahmen vorhersagen. Nach (20) wird nämlich beim Ausstrahlen der nach Violett hin gelegenen Triplettkomponente für den Fall, daß das Elektron die Feldrichtung im Sinne einer Rechtsschraube umkreist, der Absolutbetrag des Impulsmoments unseres Atoms beim Elektronenübergange abnehmen, im Falle einer Umkreisung im Sinne einer Linksschraube aber zunehmen. Das Impulsmoment der ausgestrahlten Welle hat dann in beiden Fällen die Richtung des magnetischen Feldes ξ (vgl. Fig. 5 a u. 5 b). Nach der Beziehung (4) wird ein so gerichtetes Impulsmoment von einem Ersatzelektron ausgestrahlt, dessen Umlaufssinn der Feldrichtung durch eine Rechtsschraube zugeordnet ist und das mithin einem entgegen der Richtung der Kraftlinien blickenden Beobachter rechtszirkulares Licht zustrahlt. Wir bemerken noch, daß im Falle der Fig. 5 a die Umlaufrichtung des Elektrons in der Anfangs- und Endbahn mit der Umlaufrichtung des strahlenden Ersatzelektrons identisch ist, daß dies in der Fig. 5 b aber nicht mehr zutrifft. Die Umlaufrichtung des Elektrons in den stationären Bahnen und die des Ersatzelektrons sind hier einander entgegengesetzt gerichtet. Bei der gegen das Rot hin gelegenen äußersten Triplettkomponente ist naturgemäß der Sinn der Polarisation der entgegengesetzte. Diese Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit der Beobachtung (vgl. etwa M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. 2, 3. Aufl. S. 73).

Nicht ebenso befriedigend sind die Ergebnisse unserer Theorie für die mittlere Triplettkomponente, d. h. für den Fall $m_1 - n_1 = 0$, wo — wie schon oben bemerkt wurde — die Polarisationsverhältnisse nur bei Anwendung weiterer Hilfsannahmen bis auf eine kleine Lücke festgelegt werden können (s. o. Formel 23 a und c).

Wir bemerken jedoch, daß wir auch beim Zeeman effekt den Weg über das Dreikörperproblem grundsätzlich für richtiger halten. Nur die Berücksichtigung der Impulsmomente der sämtlichen Faktoren, welche zusammen ein nur inneren Kräften unterworfen System bilden, rechtfertigt die Benutzung des Satzes von der Erhaltung des Impulsmoments. Aus dem Grenzfall $\mathfrak{H} = 0$ läßt sich in Strenge für $\mathfrak{H} \neq 0$ nichts extrapolieren. In der Tat stimmen auch die jetzt erhaltenen Ergebnisse mit jenen, die wir auf dem Wege über das Dreikörperproblem erhalten (vgl. § 8), nicht ganz überein.

§ 8. Starkeffekt. Wir wollen hier zunächst kurz zeigen, daß eine formelle Anwendung der beim Zeeman effekt benutzten Gedankengänge beim Starkeffekt schon aus theoretischen Gründen nicht durchführbar ist und in der Tat am Widerspruche mit der Erfahrung scheitert. Sodann soll der zum Ziele führende Weg beschritten werden.

Wir beginnen damit, daß wir an einige Ergebnisse der Theorie von Epstein¹⁾ und Schwarzschild²⁾ erinnern. Die Quantelung unseres Problems gelingt in einem System von räumlichen parabolischen Koordinaten. Liegt etwa x in der Richtung des elektrischen Feldes und ist y die Entfernung von der x -Achse, so bilden x, y und ein Winkel φ ein System von Zylinderkoordinaten und die parabolischen Koordinaten ξ, η, φ werden dann durch die Beziehung

$$x + iy = \frac{1}{2}(\xi + i\eta)^2, \varphi = \varphi$$

gegeben.

Sind nun m_1, m_2, m_3 bzw. n_1, n_2, n_3 die den Koordinaten ξ, η, φ entsprechenden Quantenzahlen der Anfangs-, bzw. Endbahn, so werden in einem elektrischen Felde von der Feldstärke E von einem H -Atom die Linien

$$\left\{ \begin{aligned} \nu &= N \left(\frac{1}{(n_1 + n_2 + n_3)^2} - \frac{1}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} \right) + \\ &\quad + \frac{3h}{8\pi^2 m e c} E \cdot Z \quad (28) \\ Z &= (m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2) - \\ &\quad - (n_1 + n_2 + n_3)(n_1 - n_2) \end{aligned} \right.$$

emittiert.

1) P. Epstein, Ann. d. Phys. 50, 489, 1916.
2) K. Schwarzschild, Berl. Ber. 1916, S. 548.

Beim Grenzübergange $E = 0$ liefert (28) unmittelbar die Balmerische Formel mit Vernachlässigung der Relativitätskorrektur. Die für $E = 0$ sich hier ergebenden stationären Bahnen sind aber geometrisch durchaus von den „richtigen“ verschieden, die bei der Quantelung mit Hilfe der ebenen Polarkoordinaten r, φ und mit Rücksicht auf die Relativität erhalten werden. Damit im Einklange steht die Tatsache, daß das Impulsmoment p einer solchen in parabolischen Koordinaten gequantelten Ellipsenbahn für $E = 0$ jetzt durch

$$p^2 = \frac{h^2}{4\pi^2} \left\{ (n_1 + n_3)(n_2 + n_3) + n_1 n_2 - \right. \quad (29) \\ \left. - 2\sqrt{n_1 n_2 (n_1 + n_3)(n_2 + n_3)} \cos \beta' \sqrt{2A} \right\}$$

gegeben wird, wo A die Energie und β' eine durch die Quantenzahlen nicht näher bestimmte Konstante bedeutet. p hat somit überhaupt nur in dem Fall, wo n_1 oder n_2 verschwindet, einen durch Quantenzahlen eindeutig festgelegten Wert und ist im allgemeinen kein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{h}{2\pi}$.

Sucht man nun die Überlegungen des § 2 formell auf die jetzigen Verhältnisse (und zwar zunächst wie beim Zeeman effekt für $E = 0$) zu übertragen, so scheitert man vor allem schon an dem Vorhandensein von Sonderfällen, wo bei einem Elektronenübergang sich p um Vielfache von $\frac{h}{2\pi}$ ändert, die größer als 1 sind,

was offenbar nicht zulässig ist. So kann z. B. die $Z = 18$ entsprechende stärkste p -Komponente von H_γ allein nur durch den Übergang des Elektrons aus der Anfangsbahn $m_1 = 4, m_2 = 0, m_3 = 1$ in die Endbahn $n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 1$ zustande kommen. Nach (29) muß dabei das Impulsmoment des Atoms im Grenzfalle, wenn $E = 0$ ist, von

$$p = \frac{h}{2\pi} \sqrt{5} \quad \text{auf} \quad p = \frac{h}{2\pi} \sqrt{2} \quad (30)$$

abnehmen. Nun ist aber die Polarisation dieser Linie nach den Beobachtungen Starks³⁾ im Längs- und Quereffekt eine solche, wie sie im Bilde der klassischen Theorie einem Elektron entspricht, welches parallel dem elektrischen Felde schwingt, und es dürfte demnach das Atom bei der Ausstrahlung dieser Linie sein Impulsmoment überhaupt nicht ändern, im Widerspruche mit (30).

Selbstverständlich dürfen wir über dieses

1) Vgl. P. Epstein, l. c. S. 496.
2) Vgl. P. Epstein, l. c. S. 512.
3) J. Stark, Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome. Leipzig 1914, vgl. S. 33.

Versagen des jetzt versuchten Weges nicht weiter staunen. Wie wir schon oben bemerkt haben, ergibt zwar die Epstein-Schwarzschildsche Quantelung im feldlosen Falle $E=0$ für die stationären Bahnen bekanntlich die richtigen Energiewerte; die Bahnen und die hier den Bahnen zugeordneten Impulsmomente (29) sind jedoch offenbar falsch. Sie widersprechen nämlich der für $E=0$ mit Hilfe der ebenen Polarkoordinaten r, φ erhältlichen (und wie von P. Epstein wiederholt betont wurde auch beim Stark effekt für $E=0$ eigentlich richtigen) Quantelung, die allein den Forderungen des Relativitätsprinzips und damit der Feinstruktur entspricht. Es ist daher vollständig einleuchtend, daß wir aus der für $E=0$ falschen Quantelung durch Extrapolation auf $E \neq 0$ ein richtiges Resultat nicht erhalten können. Um auf dem jetzt beschrittenen Wege zum Ziele zu gelangen, müßten wir von der bisher nicht durchgeführten Quantelung des Stark effekts bei Berücksichtigung des Relativitätseinflusses ausgehen. Außerdem bleibt natürlich gegen den oben betrachteten Weg nach unseren allgemeinen Gesichtspunkten (vgl. § 6 und das über den Zeeman effekt im § 7 Gesagte) auch hier der Einwand voll zu Recht bestehen, daß Schlüsse auf die Polarisation des ausgesandten Lichtes nur mit Rücksicht auf das Impulsmoment aller an dem Systeme beteiligten Faktoren gemacht werden dürfen.

Eine Übereinstimmung der Beobachtungen am Stark effekt mit unseren allgemeinen Betrachtungen läßt sich aber in der folgenden Weise erzielen. Wir denken uns zunächst, daß der das elektrische Feld erzeugende Körper sich im Endlichen befindet, eine endliche Masse besitzt und frei beweglich ist. Elektron, Kern und felderzeugender Körper bilden dann ein nur inneren Kräften unterworfenen System, dessen Impulsmoment sich zeitlich nicht ändert. Von diesem „wirklichen“ Falle aus gelangen wir dann, indem wir den felderzeugenden Körper immer weiter vom Atom wegrücken und dabei die Ladung des Körpers entsprechend anwachsen lassen zu dem von Epstein und Schwarzschild rechnerisch behandelten Grenzfalle des Stark effekts. Uns handelt es sich vor allem darum, den Beitrag des unendlich fernen, felderzeugenden Körpers zum Impulsmomente \mathfrak{J} des gesamten Systems „Atom + felderzeugenden Körper“ im Grenzfalle festzustellen. Dies kann durch eine einfache Rechnung oder noch einfacher durch eine Überlegung erschlossen werden. Zweifellos läßt sich unser Grenzübergang so einrichten, daß im Grenzfalle \mathfrak{J} einen endlichen Wert hat. Bekanntlich ist nun das Impulsmoment

unseres, dem Einflusse des elektrischen Feldes unterworfenen Atoms nur in seiner zur Feldrichtung e parallelen Komponente zeitlich konstant, während es in der dazu senkrechten zeitlich veränderlich ist. Da nun \mathfrak{J} konstant ist, so muß mithin im Grenzfalle das Impulsmoment des felderzeugenden Körpers in seiner zu e senkrechten Komponente zeitlich veränderlich (indem es das veränderliche Impulsmoment des Atoms kompensiert) und in seiner zu e parallelen Komponente zeitlich konstant sein. Da noch, wie eine nähere Abschätzung zeigt, im Grenzfalle bei einer ins Auge gefaßten Bewegung des Atoms das Impulsmoment des felderzeugenden Körpers nur bis auf einen konstanten Beitrag bestimmt ist, so können wir sagen: Die zur Feldrichtung e parallelen Komponenten der Impulsmomente von Atom und felderzeugendem Körper stehen während der Bewegung des Atoms in keiner Wechselbeziehung zueinander und haben voneinander unabhängige, zeitlich konstante Werte.

Diese letzterwähnte Tatsache legt uns die für das Folgende grundlegende Annahme nahe, daß auch während eines Elektronenübergangs die zur Feldrichtung e parallele Komponente des Impulsmoments vom felderzeugenden Körper ungeändert bleibt. Die Änderung der in die Feldrichtung e fallenden Komponenten des gesamten Impulsmomentes \mathfrak{J} ist dann bei einem Elektronenübergang gleich der Änderung der zu e parallelen Komponente des Impulsmoments des Atoms. Da nun diese Größe nach Epstein vor, bzw. nach dem Elektronenübergang gleich $m_3 \frac{h}{2\pi}$ bzw. $n_3 \frac{h}{2\pi}$ ist, so ist nach der jetzt gemachten Voraussetzung die Änderung der in die Richtung von e fallenden Komponente von \mathfrak{J} bei einem Elektronenübergang durch

$$(m_3 - n_3) \frac{h}{2\pi} \quad (31)$$

gegeben.

Beträgt nun der Absolutbetrag des Impulsmoments \mathfrak{J} vor bzw. nach der Ausstrahlung $m \frac{h}{2\pi}$ bzw. $n \frac{h}{2\pi}$, wo m und n jetzt eventuell nicht mehr ganze Zahlen sein* werden (solange die Quantelung des Dreikörperproblems nicht durchgeführt ist, läßt sich darüber nichts Bestimmtes aussagen), so folgt jetzt aus dem § 2, da die dortigen Schlüsse keineswegs an der Ganzzahligkeit von m und n hängen, ebenso wie dort

$$|m - n| \leq 1,$$

d. h. die Änderung des Absolutbetrages des gesamten Impulsmoments \mathfrak{J} kann bei der Aus-

strahlung höchstens $\frac{h}{2\pi}$ betragen. Da aber bei dem Elektronenübergang die Änderung der in die Richtung von e fallenden Komponenten höchstens gleich dem Absolutbetrage der höchstzulässigen gesamten Änderung dieses Vektors sein kann, so erhalten wir jetzt aus (31), daß

$$|m_3 - n_3| \leq 1$$

ist, d. h. es besteht für die Versuchsbedingungen des Starkeffektes das nachstehende

Auswahlprinzip: Ein Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn m_1, m_2, m_3 in eine andere n_1, n_2, n_3 ($m_1 + m_2 + m_3 > n_1 + n_2 + n_3$) kann bei Vorhandensein eines äußeren elektrischen Feldes nur so erfolgen, daß sich dabei die Quantenzahl m_3 höchstens um eine Einheit ändert, d. h.

$$m_3 - n_3 = +1, 0, -1. \quad (32)$$

Wir bemerken gleich, daß man in der Tat feststellen¹⁾ kann, daß bei allen beim Starkeffekt beobachteten Linien stets solche Übergänge vorhanden sind, wo die Quantenzahl m_3 sich höchstens um eine Eins ändert, d. h. unser Auswahlprinzip widerspricht nicht der Erfahrung.

Nunmehr gehen wir zur Besprechung der Polarisationsverhältnisse über. Bekanntlich hat Epstein empirisch eine Polarisationsregel aufgestellt, die sich ausnahmslos bewährt hat und folgendermaßen lautet:

Bei allen Elektronenübergängen, wo $m_3 - n_3$ eine gerade, bzw. ungerade Zahl ist, erscheint bei Beobachtung des Quereffektes (d. h. senkrecht zu den Kraftlinien) die entstehende Lichtwelle so polarisiert, als ob sie (im Bilde der klassischen Theorie) von einem zur Feldrichtung parallel, bzw. senkrecht schwingenden Elektron (p - und s -Komponenten) herrühren würde.

Nach unserer Bemerkung zum Auswahlprinzip ersetzen wir hier zunächst die Epsteinsche Alternative: $m_3 - n_3$ gerad- oder ungeradzahlig durch die Alternative: $m_3 - n_3$ gleich 0 oder gleich ± 1 . Für den Fall $m_3 - n_3 = \pm 1$ gelten dann bei allen in § 2 benutzten Ungleichungen die Gleichheitszeichen; die Änderung des gesamten Impulsmomentes \mathfrak{J} hat hier den höchstzulässigen Betrag $h/2\pi$, erfolgt in der Richtung e des Feldes (da ja hier die höchstzulässige Änderung von \mathfrak{J} schon in der Richtung e der einen Komponente vor sich geht, muß die Richtung der ganzen Änderung eben mit der Richtung dieser Komponente zusammenfallen),

1) Herr P. Epstein hatte die Freundlichkeit, die Richtigkeit dieser Behauptung an der Hand seiner Aufzeichnungen zu prüfen.

und unser Ersatzelektron muß rein zirkularpolarisiertes Licht ausstrahlen, wobei es sich in der Ebene senkrecht zu den Kraftlinien bewegt. Damit ist offenbar die eine Hälfte der Epsteinschen Regel bewiesen. Für den Fall $m_3 - n_3 = 0$ können wir zur Erklärung der Epsteinschen Polarisationsregel nur durch die ad hoc gemachte Zusatzhypothese gelangen, daß sich für $m_3 - n_3 = 0$ überhaupt das Impulsmoment unseres gesamten Dreikörpersystems nicht ändert. Unser harmonisch schwingendes Ersatzelektron muß dann (vgl. § 3) rein linear-polarisiertes Licht aussenden, wobei aber die Richtung der Geraden, in der das Ersatzelektron sich bewegt, noch unbestimmt bleibt.

Unsere Theorie fordert aber auch, daß alle Linien, für die $m_3 - n_3 = \pm 1$ ist, d. h. daß alle s -Komponenten des Quereffektes auch im Längseffekt (d. h. in der Richtung der Kraftlinien) sichtbar sind. Diese Linien werden nämlich durch ein in der Ebene senkrecht zur Feldrichtung zirkular schwingendes Ersatzelektron ausgesendet. Darüber hinaus können wir aber noch behaupten, daß im Längseffekt diese Linien unpolarisiert erscheinen müssen. Jetzt wird zwar einer bestimmten Komponente der durch das elektrische Feld zerlegten Spektrallinie im allgemeinen ein Wert $m_3 - n_3 = +1$ oder -1 eindeutig zugeordnet und damit bei jeder Komponente eindeutig festgelegt, ob das Impulsmoment des Atoms, wenn sie ausgestrahlt wird, dem absoluten Betrage nach, ab- oder zunimmt; da hier aber die Energie des Elektrons (im Gegensatze zum Zeeman effekt) von seinem Umlaufsinne um die Feldrichtung vollständig unabhängig ist, so kann hier bei einer ins Auge gefaßten Komponente diese Impulsmomentänderung im oder entgegen dem Sinne des Feldes erfolgen, je nach dem Sinne, in dem das Elektron in der Anfangs- oder Endbahn läuft. Dies bedeutet aber, daß bei jeder Komponente im Längseffekt sowohl rechts als auch links zirkulares Licht ausgestrahlt werden kann und daher diese Linien im Längseffekt unpolarisiert erscheinen müssen. Dies wird durch die Beobachtungen Starks¹⁾ vollständig bestätigt.

Das Auswahlprinzip (32) enthält im Gegensatze zum Auswahlprinzip (12) keine Festsetzungen über den Betrag der bei einem Elektronenübergänge stattfindenden Änderung des gesamten Impulsmomentes des Systemes „Kern + Elektron“. Darin liegt eine Möglichkeit, die teilweise Nichtübereinstimmung von (12) mit den beobachteten Feinstrukturen (vgl. § 5) zu erklären. Ist nämlich ein äußeres, wenn auch

1) J. Stark, l. c. S. 33.

noch so schwaches elektrisches Feld vorhanden, so kommt es nicht mehr auf die Änderung des gesamten Impulsmoments an, sondern nur auf die Änderung seiner zur Feldrichtung parallelen Komponente. Diese kann aber, wenn nur die Anfangs- und Endbahn des Elektrons gegen das Feld entsprechend geneigt sind, sehr wohl entsprechend der Ungleichung (32), kleiner als $\frac{h}{2\pi}$ sein, während z. B. wie bei der Komponente I_d der He_+ -Linie 4686 Å.-E die Änderung des gesamten Impulsmoments gleich $2 \frac{h}{2\pi}$ ist (vgl. § 5). Allerdings handelt es sich hier, solange wir nicht eine Theorie des Stark effekts mit Berücksichtigung des Relativitätseinflusses haben, vorläufig nur um eine unbewiesene, wenn auch sehr wahrscheinliche Vermutung.

Wir können jetzt auch sofort übersehen, zu welchen Resultaten beim Zeeman effekt das hier eingeschlagene Vorgehen führt. Während wir in § 7 in den dortigen Bezeichnungen das Auswahlprinzip

$|m - n| \leq 1$ und gleichzeitig $|m_1 - n_1| \leq 1$ hatten, tritt jetzt an dessen Stelle allein die Forderung

$$|m_1 - n_1| \leq 1,$$

ohne daß gleichzeitig $m - n$ irgendwelchen Einschränkungen unterworfen wäre. Dadurch wird vor allem die Zahl der Entstehungsmöglichkeiten der Triplettkomponenten, insbesondere die der beiden äußersten (s. u.), erheblich vermehrt. Die Aussagen des § 7 über die Polarisationsverhältnisse bleiben dabei vollinhaltlich bestehen.

Die Frage, welcher von den beiden, beim Zeeman effekte eingeschlagenen Wege der richtigere ist, läßt sich, bevor das Dunkel des Ausstrahlungsvorganges noch nicht aufgehellt ist, eigentlich nicht abschließend beantworten. Grundsätzlich für richtiger (vgl. § 6 und den letzten Absatz des § 7) halten wir das beim Stark effekt angewandte Verfahren. Doch auch die Intensitätsverhältnisse im Zeeman-Triplett scheinen diese Ansicht zu stützen. Nach

§ 7 sollte nämlich die Intensität der mittleren Triplettkomponente im Vergleiche zu den beiden äußeren Komponenten mit der Ordnungszahl der zerlegten Balmerlinie wachsen und im allgemeinen noch größer sein als 2:1, wie dies wirklich beobachtet wird. Es kommen ja nach § 7 für die Erzeugung der beiden äußeren Triplettkomponenten nur jene Quantenbahnen in Betracht, die in der Ebene senkrecht zur Feldrichtung verlaufen, während die die mittlere Komponente liefernden Bahnen eine beliebige durch Quantenzahlen festgelegte Orientierung haben können. Die Zahl der Entstehungsmöglichkeiten der mittleren Komponente ist daher im allgemeinen um vieles größer als die der beiden äußeren zusammengenommen.

Das beim Stark effekt angewandte Verfahren zur Quantelung schränkt aber auch beim Zeeman effekte bei keiner Triplettkomponente die räumliche Orientierung der gequantelten Anfangs- und Endbahnen¹⁾ ein.

Zusammenfassung.

Aus der Forderung, daß beim Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn in eine andere das vom Atome verlorene Impulsmoment in der ausgestrahlten Welle sich vollständig wiederfindet, wird ein Auswahlprinzip erhalten, dem praktisch die Sommerfeldschen Quantenungleichungen gleichwertig sind. Die Verallgemeinerung der Theorie für den Fall des Zeeman effekts erklärt vor allem das Nichtauftreten der nach der Sommerfeld-Debyeschen Theorie zu erwartenden, beim Versuche aber nicht beobachteten überzähligen Komponenten. Schließlich kann beim Zeeman- und Stark effekt eine an der Erfahrung sich bestätigende, wenn auch nicht ganz vollständige Polarisationsregel angegeben werden.

¹⁾ Vgl. hierzu A. Sommerfeld, Münchner Ber. 1917, S. 83.

München, Institut für theoretische Physik, im Mai 1918.

(Eingegangen 22. Mai 1918.)